實用技能學程試用教材

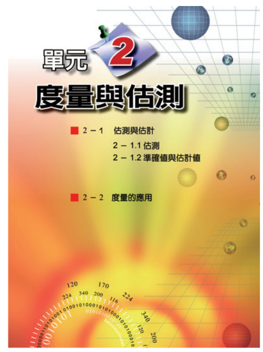
數學

Ⅰ

目錄 Contents

單元三　坐標與直線

單元四　數列與級數



數學

實用技能學程試用教材

希望學生能熟稔數學的基本概念及基礎運算，對於學習有所幫助，且能應用於未來生活上。所以選用之單元均以實用性爲主要考量，而內容及使用之文詞均淺顯易懂。

本書在各重點之後，編列有「演示」，供教師講解；而每一例題之後有「自我練習」，供學生立即演練，以使學生能熟稔學習內容。每一節之後附有自我挑戰，供學生於課堂或課後加強練習，期能藉反覆練習，以增強學習效果。

單元 1

運算概念與技術

■ 1－1　多項式及其運算

1－1.1 多項式的基本概念

1－1.2 多項式的運算

■ 1－2　計算機與電腦應用軟體的操作

1－2.1 計算機

1－2.2 電腦應用軟體

單元一　運算概念與技術

本單元我們將探討多項式的基本概念和多項式的加減基礎運算，並將數的運算延伸為多項式的運算；接著將介紹計算機（*calculator*）與電腦應用軟體的操作，以輔助數學的計算，增強學習的效能，使未來能在生活上充分的應用。

1－1　多項式及其運算

1－1.1 多項式的基本概念

一、認識多項式

談到多項式，一般都認為很難在生活中找到實例，其實我們生活中處處都是多項事物的組合，一般習慣直接使用文字來描述。事實上，這些描述都可以用數學式子來表示。例如：甲有財產為房屋三棟，每棟價值 8 百萬元；轎車二輛，每輛價值 1 百萬元；銀行定存五筆，每筆 2 百萬元，這是我們平常口語上的描述。如果把它寫成數學式子：

甲的財產＝房屋三棟（每棟價值 8 百萬元）＋
　　　　　轎車二輛（每輛價值 1 百萬元）＋
　　　　　定存五筆（每筆價值 2 百萬元）

這就是一個多項組合。

若我們改以金額計算其財產，則式子變為：

甲的財產＝ 8 百萬元× 3 ＋ 1 百萬元× 2 ＋ 2 百萬元× 5

若以 A 表示甲的財產，並以百萬元爲計算單位，則這個式子變爲：

$A=8\times 3+1\times 2+2\times 5$（百萬元）

又若房屋單價、汽車單價及定存單價固定不變，而數量是變動的，以 x 代表房屋數量，以 y 代表汽車數量，以 z 代表銀行定存數量，則甲的財產可表示爲：

$A=8\times x+1\times y+2\times z$，將乘號 $\times$ 省略：

即 $A=8x+y+2z$，這就是一般數學的多項式。

這算式更吻合現實的生活，甲的財產可因擁有房屋（x）數量、汽車（y）數量、定存（z）數量的改變而增減。

還有我們平常使用的整數，例如：34825 讀作三萬四千八百二十五，也就是是 3 個萬、4 個千、8 個百、2 個十、5 個 1 組成，把它寫成算式：

$34825=3\times 10000+4\times 1000+8\times 100+2\times 10+5\times 1$

又 $10000=10^4$、$1000=10^3$、$100=10^2$、$10=10^1$、$1=10^0$，

代入上式，則得：

$34825=3\times 10^4+4\times 10^3+8\times 10^2+2\times 10^1+5\times 10^0$，若我們再以 $f(x)$ 代表 34825，以 x 代表 10，再依數學省略原則（$10=10^1$、$1=10^0$、數字和文字符號間的乘號可省略），這個算式成爲：

$f(x)=3x^4+4x^3+8x^2+2x+5$，這也是多項式。

$A=8x+y+2z$ 和 $f(x)=3x^4+4x^3+8x^2+2x+5$ 有什麼不同呢？周遭的事物組合，是不是都可以用多項式表示？還有代表整體的符號使用 A 和 $f(x)$ 有特殊的意義嗎？

在數學上我們習慣用文字或符號來表示未知的數，如 a、b、x、y、甲、乙…等，而由數、文字符號及運算符號所構成的式子，就稱爲多項式。如：x^2+2x-3，$x^3-2y^2+3xy-1$，…等。

我們將多項式中的文字部分稱爲**不定元**，只有一個不定元的多項式，稱爲**單元多項式**，如：x^2+2x-3（只有一個不定元 x）。而有兩個或兩個以上不定元的多項式，稱爲**多元多項式**，如：$x^3-2y^2+3xy-1$（有 x、y 兩

個不定元）。

本單元僅討論單元多項式，對於所有不定元為 x 的單元多項式，都可以寫成下列形式：

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

其中 n 為正整數，且 a_n、a_{n-1}、…、a_1、a_0 均為實數。

二、多項式常用名詞

●下列為多項式的相關名詞：

⑴**次數**：在一個 x 的多項式中，x 的最高次數稱為此多項式的次數。

如：$2x^3-3x^2+5x-1$，次數為 3。

⑵**項**：多項式中，被加號或減號隔開的每一部分稱為項。

如：$2x^3-3x^2+5x-1$，包含 $2x^3$，$-3x^2$，$5x$，-1 四個項。

⑶**常數項**：多項式中，不含文字符號的項，稱為此多項式的常數項。

如：多項式 $2x^3-3x^2+5x-1$ 中，「-1」這一項不含文字符號，稱為常數項。

⑷**係數**：每一項中，文字以外的部分稱為係數。最高次項的係數稱為領導係數。

如：多項式 $2x^3-3x^2+5x-1$ 中，

2 為三次項（x^3 項）的係數，-3 為二次項（x^2 項）的係數，

5 為一次項（x 項）的係數，-1 為常數項的係數。

其中 2 為最高次項的係數，所以為此多項式的**領導係數**。

⑸**同類項**：我們將不定元相同及次數相同的項稱為同類項。

如：$3x^2$ 和 $\frac{1}{2}x^2$ 是同類項，$5x$ 和 $\frac{2}{3}x$ 是同類項，5 和 -6 也是同類項。

演示 1

指出下列各項中那些是同類項？

x^2 、 $\frac{1}{2}x^2$ 、 $\frac{2}{x}$ 、 $-5x^3$ 、 $10x^{\frac{1}{2}}$ 、 $-3x$ 、 $\frac{-2x}{5}$

解：x^2 和 $\frac{1}{2}x^2$ 是同類項，

$-3x$ 和 $\frac{-2x}{5}$ 是同類項；

$\frac{2}{x}$ 、 $-5x^3$ 、 $10x^{\frac{1}{2}}$ 不是同類項。

自我練習 1

指出下列各項中那些是同類項？

$3x^{-2}$ 、 $\frac{1}{2}x^2$ 、 $\frac{1}{x}$ 、 $-5x^{\frac{1}{2}}$ 、 $3x^3$ 、 $\frac{3x^3}{4}$ 、 $-7x^2$

演示 2

一多項式為 $6x^2-5x+3$，試回答下列問題：

(1)次數：____________。

(2)有那些項：____________。

(3)領導係數：____________。

(4)一次項的係數：____________。

(5)常數項：____________。

解：(1)次數：2 次。

(2)有那些項：有 $6x^2$ 、 $-5x$ 、 3 共三項。

(3)領導係數：6 。

(4)一次項的係數：-5。

(5)常數項：3。

自我練習 2

一多項式為 $3x-5x^2+7-2x^3$，試回答下列問題：

(1)次數：______________。

(2)有那些項：______________。

(3)領導係數：______________。

(4) x 項的係數：______________。

(5)常數項：______________。

一個多項式如果只有單獨一項，我們稱為**單項式**，如：x^2、$3x$，5 …等，均為單項式。當此多項式為不含文字符號的常數項時，稱為**常數多項式**。

(1)若常數多項式不為零，其次數為 0，稱為**零次多項式**。

(2)若常數多項式為零，稱為**零多項式**，在此不規定(不討論)零多項式的次數。

常數多項式a $\begin{cases} 若\ a\neq 0：零次多項式。如：3、-2、\ldots。\\ 若\ a=0：零多項式。\end{cases}$

演示 3

若多項式 ax^2+bx+c 為零次多項式，則 a、b、c 三數的條件為何？

解：因為 ax^2+bx+c 為零次多項式，其次數為 0、常數項不為 0，

所以 $a=0$、$b=0$、$c\neq 0$。

自我練習 3

若多項式 $(a-1)x^2+(b+2)x+c-3$ 為零多項式，則 a、b、c 三數為何？

三、多項式的排列

為了便於運算，我們常將多項式依照不定元 x 的次數排列，次方由大到小排列，稱為降冪排列（又稱降次排列）；反之，次方由小到大排列，稱為升冪排列（又稱升次排列）。一般為方便計算，常以降冪排列來表示。

例如：$f(x)=5x^3+x^2+3x-2$，依 x 的次方 3、2、1、0 排列，為降冪排列；而 $f(x)=-2+3x+x^2+5x^3$，依 x 的次方 0、1、2、3 排列，為升冪排列。

演示 4

請將多項式 $f(x)=4x+2x^3-3-7x^2$ 按照(1)降冪排列 (2)升冪排列

解：(1)降冪排列：$f(x)=2x^3-7x^2+4x-3$

(2)升冪排列：$f(x)=-3+4x-7x^2+2x^3$

自我練習 4

請將多項式 $g(x)=5x^2-7+2x^3-6x$，按照(1)降冪排列 (2)升冪排列

1－1.2 多項式的運算

多項式的運算是數的運算之延伸，仍具有加、減、乘、除四則運算，因爲乘、除是加、減演變而來，所以我們僅介紹加、減之運算及相等的比較。對於多項式乘、除之運算有興趣的同學可以請教任課教師或參考相關書籍。

一、多項式的相等

兩個數相等，其數值就相等；反之兩個數值相等的數，這兩個數必會相等。而多項式是否具有同樣性質呢？

多項式的值是什麼？若有多項式 $f(x)=3x^2+2x+1$，我們以 $x=2$ 代入 $f(x)=3x^2+2x+1$，則：

$f(2)=3\times 2^2+2\times 2+1=17$，

當 $x=2$ 時，$f(x)$的值爲 17，可寫爲$f(2)=17$

若有兩個多項式 $f(x)=3x^2+2x+1$和 $g(x)=5x^2-3$，這兩個多項式相等嗎？

當 $x=2$ 時，$f(2)=3\times 2^2+2\times 2+1=17$，

$g(2)=5\times 2^2-3=17$

結果$f(2)=g(2)=17$，其值相等，但我們能說這兩個多項式$f(x)$和$g(x)$相等嗎？答案是否定的。因爲兩個多項式要相等，必須不定元代入任何相同的數時，這兩個多項式的值都相等，則這兩個多項式才是相等。

當 $x=1$ 時，$f(1)=3\times 1^2+2\times 1+1=6$，

$g(1)=5\times 1^2-3=2$

因 $6\neq 2$ 即 $f(1)\neq g(1)$，所以$f(x)\neq g(x)$

要檢驗兩多項式是否相等？必須這兩個多項式，每個同類項完全相同，

亦即**次數相同，且各項係數對應相等**。例如：

$$f(x) = 3x^2 + bx - 1$$

$$A(x) = ax^2 + 3x + c$$

若 $f(x) = A(x)$，則$3x^2 = ax^2$，$bx = 3x$，$-1 = c$，也就是同類項的係數分別相等，即 $3 = a$，$b = 3$，$-1 = c$。

因此，歸納結果為：

設兩多項式 $f(x)$ 與 $g(x)$ 相等，則其次數相同，且各項係數對應相等。

即：$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$，$a_n \neq 0$

$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0$，$b_m \neq 0$

若 $f(x) = g(x)$，則 $\underset{\uparrow \atop \text{次數相同}}{n = m}$ 且$\underbrace{a_n = b_m，a_{n-1} = b_{m-1}，\cdots，a_1 = b_1，a_0 = b_0}_{\text{各項係數對應相等}}$。

演示 5

兩多項式 $f(x) = x^2 + bx + 2$ 和 $g(x) = ax^2 + c - 2x$，若 $f(x) = g(x)$，則 a、b、c 各為多少？

解：因為$f(x) = g(x)$ 則 $x^2 + bx + 2 = ax^2 + c - 2x$

即 $x^2 = ax^2$，$bx = -2x$，$2 = c$

所以 $a = 1$，$b = -2$，$c = 2$

自我練習 5

兩多項式 $f(x) = 3x^2 + bx + 1$ 和 $g(x) = ax^2 - c + 2x$，若$f(x) = g(x)$，則 a、b、c 各為多少？

演示 6

兩多項式$f(x)=ax^2-3x+(c+1)$，$g(x)=(b+2)x-5$，若$f(x)=g(x)$，求 a、b、c 的值。

解：因為 $f(x)=g(x)$，所以其次數相同，且各項係數對應相等，

即 $a=0$、$-3=b+2$、$c+1=-5$

故 $a=0$、$b=-5$、$c=-6$

自我練習 6

若 a、b、c 滿足 $3x^2+ax-6=bx^2-5x+c$，試求 $a-b+c$ 的值。

二、多項式的加減運算

我們將不定元相同及次數相同的項稱為**同類項**，如$3x^2$和$-\frac{1}{2}x^2$是同類項、$-5x$ 和 $\frac{2}{3}x$ 是同類項、5 和-6 也是同類項。當多項式做加、減運算時，只要將其同類項相加、減，再整理即可。

演示 7

試計算下各式：

(1) $-3x^2+5x^2=?$　　(2) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x=?$　　(3) $2x^3+5x^3-10x^3=?$

解：(1) $-3x^2+5x^2=(-3+5)x^2=2x^2$

(2) $\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}x==\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)x=\frac{1}{6}x$

(3) $2x^3+5x^3-10x^3=-3x^3$

自我練習 7

(1) $13x^2-9x^2=?$

(2) $\frac{3}{5}x-\frac{5}{6}x=?$

(3) $12x^3-5x^3+11x^3=?$

(4) $-\frac{2}{5}x^2-2x^2=?$

演示 8

已知 $f(x)=5x^3-3x^2+2x-7$，$g(x)=2x^3-4x^2+5$，試求：

(1) $f(x)+g(x)$　　(2) $f(x)-g(x)$

解 1：橫式

(1) $f(x)+g(x)=(5x^3-3x^2+2x-7)+(2x^3-4x^2+5)$ 先去括號

$=5x^3-3x^2+2x-7+2x^3-4x^2+5$ 同類項合併

$=(5+2)x^3+[(-3)+(-4)]x^2+2x+(-7+5)$

$=7x^3-7x^2+2x-2$

$f(x)-g(x)=(5x^3-3x^2+2x-7)-(2x^3-4x^2+5)$ 先去括號

$=5x^3-3x^2+2x-7-2x^3+4x^2-5$ 同類項合併

$=(5-2)x^3+(-3+4)x^2+2x+[-7+(-5)]$

$=3x^3+x^2+2x-12$

解 2：直式：利用分離係數法：如遇缺項要記得補 0

(1) $f(x)$：		$5-3+2-7$
$+g(x)$：	$+)$	$2-4+0+5$
$f(x)+g(x)$：		$7-7+2-2$

即 $f(x)+g(x)=7x^3-7x^2+2x-2$

(2) $f(x)$： $5-3+2-7$

$-g(x)$： $-)\ 2-4+0+5$

$f(x)-g(x)$： $3+1+2-12$

即 $f(x)-g(x)=3x^3+x^2+2x-12$

自我練習 8

已知 $p(x)=2x^5-5x^3-6x+7$，$q(x)=-2x^3+3x^2-4x$，試求：

(1) $p(x)+q(x)$　　(2) $p(x)-q(x)$

演示 9

若 $(ax^2-5x-3)-(6x^2+bx-c)$ 為零多項式，則

$a=$ ______ 、$b=$ ______ 、$c=$ ______ 。

解：原式 $=ax^2-5x-3-6x^2-bx+c$

$=(a-6)x^2+(-5-b)x+(-3+c)$ 為零多項式

則 $a-6=0$、$-5-b=0$、$-3+c=0$

故 $a=6$、$b=-5$、$c=3$

自我練習 9

若多項式 $(4x^2+ax-b)-(cx^2+5x-a)$ 為一次多項式，其中一次項係數為 3，常數項係數為 8，$a+b+c=$ ______ 。

1-1 自我挑戰

1. 若一多項式為 $5x^2-2x+7x^3-6$，則其

   (1) 降冪排列：＿＿＿＿＿＿＿。

   (2) 常數項：＿＿＿＿＿＿＿。

   (3) 領導係數：＿＿＿＿＿＿＿。

   (4) 一次項的係數：＿＿＿＿＿＿＿。

2. 兩多項式 $f(x)=ax^3-5x+(b+1)$，$g(x)=(c+3)x^2-5x-2$，若 $f(x)=g(x)$，試求 a、b、c 的值。

3. 已知一多項式 $f(x)$ 與 $5x^2-3x-2$ 的和為 $2x-3$，則 $f(x)$ 的常數項為＿＿＿。

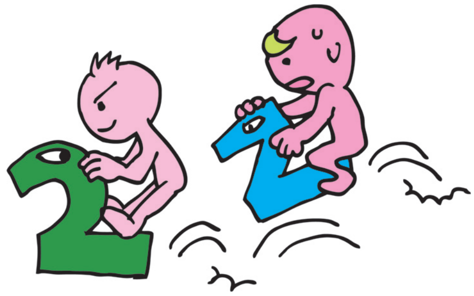
4. 已知 $f(x)=6x^2-7x^3-11+2x$，$g(x)=-8-3x^2+5x^3$，試求：

   (1) $f(x)+g(x)$　　(2) $f(x)-g(x)$

5. 若 $(9x-11-ax^2)-(8-bx+5x^2-c)$ 為零多項式，則 $a+b+c=$ ？

6. 小乙用分離係數法做二個多項式減法，其列式如下，則 $a+b+c=$ ？

$$
\begin{array}{rr}
 & 3-a-2 \\
-\,) & -b+2-5 \\
\hline
 & -2-1+c
\end{array}
$$



1－2 計算機與電腦應用軟體的操作

由於科技的進步，現在計算機及電腦，既便宜又方便，速度快且精確度又高，所以逐漸取代了算盤、計算尺等計算工具。

本節將介紹目前使用最普遍的計算機（*calculator*）及電腦（*computer*）計算軟體的操作要領。使計算便捷又正確，更可應用於生活上。

考試院辦理的國家考試可依規定使用計算機，其使用計算機的廠牌型號，請閱考試院考選部公布的「國家考試電子計算機規格標準」（可至考試院網站查詢最新公告）。

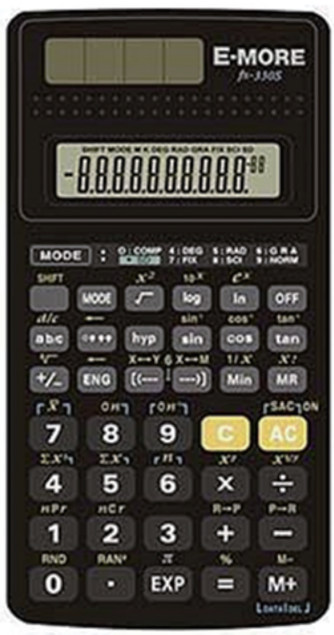
1-2.1 計算機

目前常用的計算機依計算功能可分三類：簡易型、普通型、函數型。

⑴簡易型：有加、減、乘、除四個按鍵。

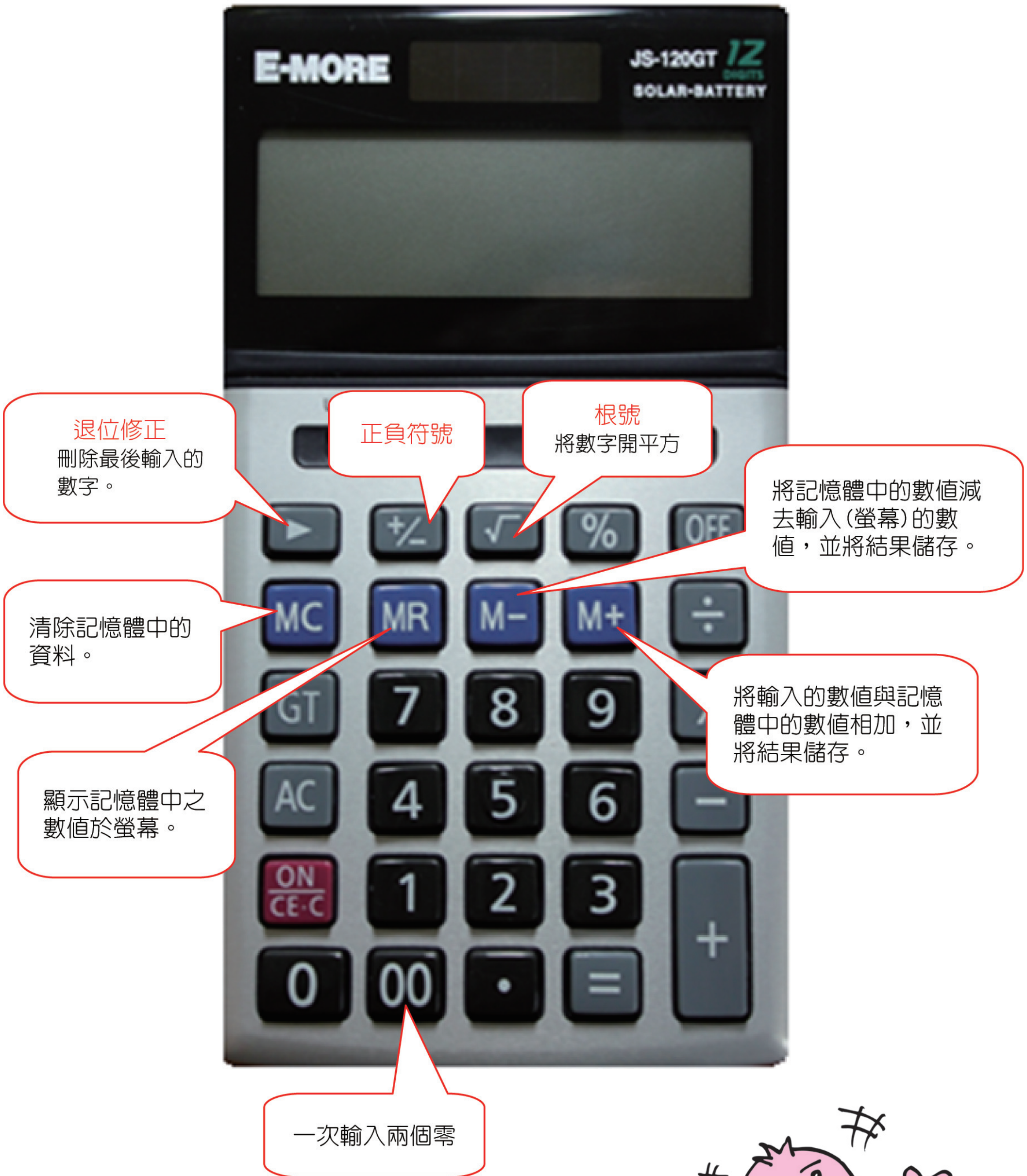
(2)普通型：有加、減、乘、除、開方、%、$M+$、MR、$M-$、GT、MC、AC、C 或 CE 等按鍵。

(3)函數型：除有普通型之按鍵外，尚有三角函數、指數、對數等，有的也可以編輯程式。



計算機型式繁多，我們擇取普通型的來介紹其操作方法及練習，因爲它已足夠日常計算使用。普通型計算機除有加、減、乘、除和數字外，其主要按鍵有 %、*MR*、*M*+、*MC*、*M*−、√、+/−、*AC*、*C*或*CE*、*GT*、⬅(或▶)、*OFF*鍵。取得計算機，首要認識各按鍵的功能與位置（注意：不同計算機的各按鍵位置可能會有不同），檢視機具是否正常，然後從實例中練習操作，只要反覆練習，熟能生巧。

一、認識各按鍵


E-MORE
JS-120GT
SOLAR-BATTERY
退位修正
刪除最後輸入的數字。
正負符號
根號
將數字開平方
將記憶體中的數值減去輸入(螢幕)的數值，並將結果儲存。
清除記憶體中的資料。
將輸入的數值與記憶體中的數值相加，並將結果儲存。
顯示記憶體中之數值於螢幕。
一次輸入兩個零
MC
MR
M−
M+
GT
AC
ON
CE·C
OFF

二、操作注意事項：

①先啟動計算機，螢幕顯示 0。

②檢驗計算機是否正常－螢幕按滿 8，檢查是否有筆劃缺損(如有缺損表示故障不要使用)。

③固定小數點位數；計算機及電腦之計算結果都是近似值，要準確什麼程度，應依實際狀況擇取小數位數。

④清除記憶體中之資料及螢幕歸零。

⑤計算機沒有括號，請依按鍵功能逐一輸入計算式，就可計算出結果。

⑥按錯了數值，只要按 C 鍵即可清除螢幕上的數值，再重新輸入正確數值，不必從頭輸入(亦可按 ◀ 或 ▶ 鍵逐一更正)。

注意：練習過程中亦可參考本小節後之附表：按鍵功能說明表。本節演示解答時之數字加外框，如 $\boxed{30}$，表示螢幕顯示的結果。

演示 1

試求 $5 \times 6 + 60 \div 5 = ?$

解：輸入：$5 \times 6\ M+\ \boxed{30}\ 60 \div 5\ M+\ \boxed{12}\ MR\ \boxed{42}$

操作分解：

序號	輸入	螢幕顯示
1	5	5
2	×	5
3	6	6
4	M+	30
5	60	60
6	÷	60
7	5	5
8	M+	12
9	MR	42

答：42

自我練習 1

試求 $1515\times 67+6025\div 5-321=?$

演示 2

試求 $40+(75\div 5)-10=?$

解：輸入： $40\ M+\ 75\div 5\ M+\ \boxed{15}10\ M-\ MR\ \boxed{45}$

操作分解：

序號	輸入	螢幕顯示
1	40	40
2	M+	40
3	75	75
4	÷	75
5	5	5
6	M ＋	15
7	10	10
8	M －	10
9	MR	45

答： 45

自我練習 2

試求 $740-25+(3500\div 175)-120=?$

單元一 運算概念與技術

演示3

若 $x=\dfrac{-2-\sqrt{25}}{2}$，試求 x 的值。

解：輸入：$-$ 2 $M+$ $\boxed{-2}$ 25 $\sqrt{\ }$ $M-$ ÷ 2 MR $\boxed{-3.5}$

操作分解：

序號	輸入	螢幕顯示
1	－	0
2	2	-2
3	M+	-2
4	25	25
5	$\sqrt{\ }$	5
6	M －	5
7	÷	
8	2	2
9	MR	-3.5

答：$x=-3.5$

自我練習3

若 $x=\dfrac{-7+\sqrt{215}}{2}$，試求 x 的值（以四捨五入取小數兩位）。

演示4

試求 $2\times3+7\times13+19\times12=$？

（本題可利用 GT 之功能求解，亦可利用 $M+$，MR 求解）

解：利用 GT 求解

輸入：$2\times3=$ $\boxed{6}$ $7\times13=$ $\boxed{91}$ $19\times12=$ 228 GT $\boxed{325}$

操作分解：

序號	輸入	螢幕顯示
1	2	2
2	×	2
3	3	3
4	＝	6 (此時螢幕上有 GT 顯示)
5	7	7
6	×	7
7	13	13
8	＝	91
9	19	19
10	×	19
11	12	12
12	＝	228
13	GT	325

答：$x=325$

自我練習 4

求 23× 15＋15× 17× 3＋23× 27÷ 69＋45× 72＋24× 39＝？

演示 5

有一件外套標價為 1500 元，若另加稅金 8%，請問總價是多少？

解：輸入：1500 $M+$ $\boxed{1500}$× 0.08 $M+$ $\boxed{120}$ MR $\boxed{1620}$

（8 ÷ 100 ＝ 0.08）

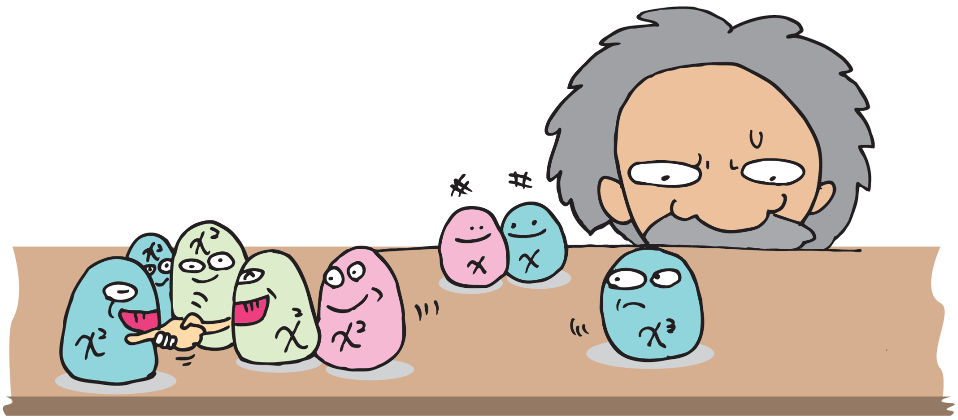
操作分解：

序號	輸入	螢幕顯示
1	1500	1500
2	M+	1500
3	×	1500
4	0.08	0.08
5	M+	120
6	MR	1620

答：總價為 1620 元

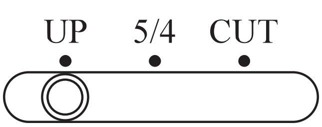
自我練習 5

某廠牌的洗衣機標價為 20500 元，但購買時需另加 5%的增值稅，庭庭欲購買一台，請問需付款多少？



附表：按鍵功能說明表

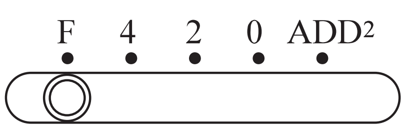
按 鍵	功　　能
%	計算除法時結果以百分數顯示。
AC	啓動計算器及全部清除（不清除記憶體的數值）。
C 或 CE	將螢幕最後顯示的數值清除爲零。
MR	顯示記憶體中之數值於螢幕。
MC	清除記憶體中的資料。
M+	將輸入的數值與記憶體中的數值相加，並將結果儲存。
M-	將記憶體中的數值減去輸入(螢幕)的數值，並將結果儲存。
OFF	關閉電源。
√	將螢幕上的數值開平方。
◀ 或 ▶	退位修正(刪除最後輸入的數字)。
+/-	性質符號。
GT	將連續運算的計算式結果(按=或%後)加總(累加)。
ON	開啓電源



UP：無條件進位。

5/4：四捨五入。

CUT：無條件捨去。



F：正常浮動小數位數。

4 2 0：小數點位數設定爲 4、2、0 位。

ADD_2：於加減運算中，不必按小數點，按＋或－ 後，自動將最後兩位數設定爲小數 2 位。

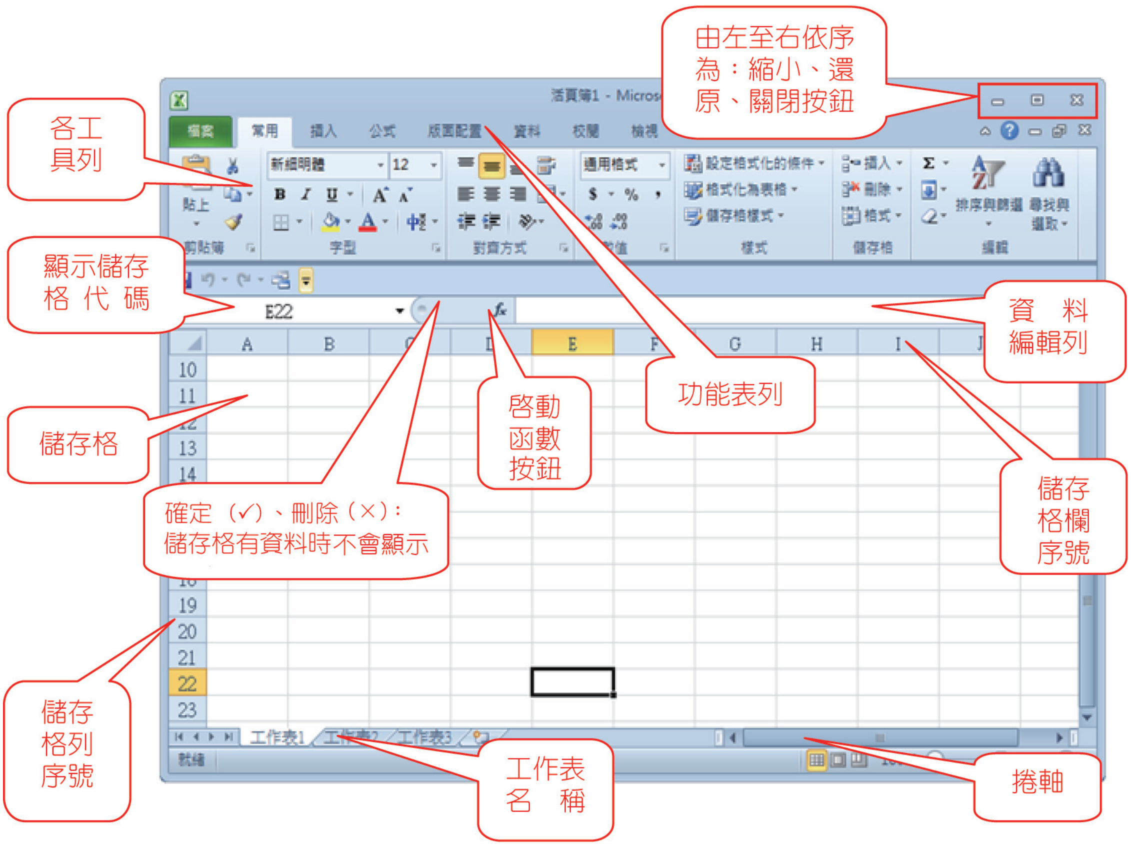
1 － 2.2 電腦應用軟體

電腦的使用已非常普遍，可以協助計算或整理資料的套裝軟體市面上相當多，個人可以依照自己的需求尋找適合的軟體使用。

電腦與計算機的差異，就是電腦是可以儲存、運算大量的資料，而關機後資料仍然存在；一般的計算機一經關機後，資料將會消失，但攜帶方便，使用上較為便捷。因此，若需要將資料及運算式等儲存者，選用電腦操作較為適合。

本單元選用 *Excel* 2010 電腦應用軟體來介紹其計算方法。如果你要更深入的了解它的功能，建議詳讀其相關書籍。

- Excel(2010)**畫面簡介**



• 操作注意事項：

①儲存格代碼是欄序號與列序號組合而成（欄用 A、B、$C\cdots$，列用 1、2、3…編碼。）例如：第 2 欄、第 3 列之儲存格代碼為 $B3$。

②儲存格可以重新命名（中、英文均可）以取代「代碼」。

③ 每一儲存格代表一筆數值（即每一儲存格可輸入一筆數值）。

④ 你所輸入的計算式都是函數型，就是指定儲存格的數值改變，計算結果立即改變。

⑤計算結果是近似值，所以應事先選擇小數位數。

⑥加減運算符號為：加號是 ＋ ，減號是 － ，乘號是 * ，除號是 / ，次方是 ^ 。

⑦沒有根號（$\sqrt{\ }$），遇到根號一般必須用次方表式。例如：$\sqrt{3}$要輸入 3^0.5 或 3^(1/2)。**亦可使用 *Excel* 提供的開方函數處理**。

⑧電腦使用之括號只有小括號 (　)，沒有大括號、中括號等，計算時是由內而外逐一計算。

演示 6

設$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，若 $a=2$、$b=3$、$c=1$，試求 x。

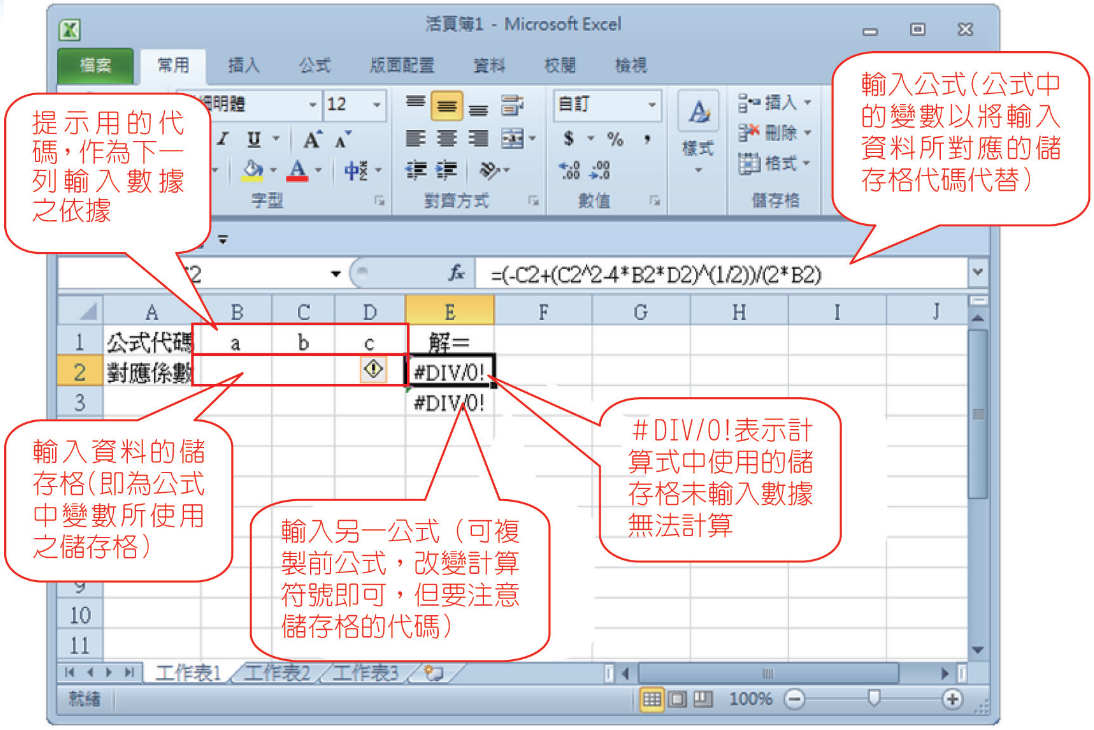
(解以四捨五入取小數兩位)

解：利用 *Excel* 計算如下：

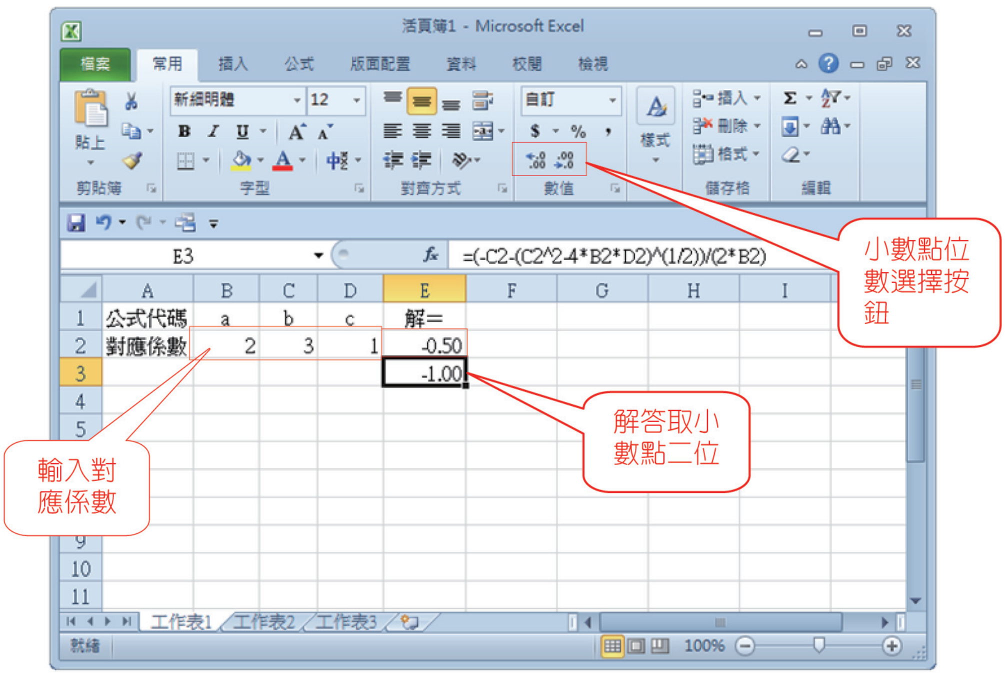
⑴先指定儲存格（$B2$、$C2$、$D2$），以輸入求解方程式對應係數值。

⑵輸入公式（公式中 a、b、c 是輸入對應「儲存格」的代碼：$B2$、$C2$、$D2$；公式中的 ± 必須 ＋ 、－ 分別計算。

即分別求 $x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 及 $x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 之值。



活頁簿1 - Microsoft Excel
=(-C2+(C2^2-4*B2*D2)^(1/2))/(2*B2)
公式代碼 a b c 解＝
對應係數 #DIV/0!
#DIV/0!
提示用的代碼，作為下一列輸入數據之依據
輸入公式(公式中的變數以將輸入資料所對應的儲存格代碼代替)
輸入資料的儲存格(即為公式中變數所使用之儲存格)
輸入另一公式（可複製前公式，改變計算符號即可，但要注意儲存格的代碼）
＃DIV/0!表示計算式中使用的儲存格未輸入數據無法計算



活頁簿1 - Microsoft Excel
E3
=(-C2-(C2^2-4*B2*D2)^(1/2))/(2*B2)
公式代碼 a b c 解＝
對應係數 2 3 1 -0.50
-1.00
小數點位數選擇按鈕
解答取小數點二位
輸入對應係數

答 $x=-0.5$ 或 $x=-1.00$

自我練習 6

(1) 設 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，若 $a=1$、$b=3$、$c=-1$，試求 x。

(2) 設 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，若 $a=-1$、$b=3$、$c=10$，試求 x。

（解均以四捨五入取小數兩位）

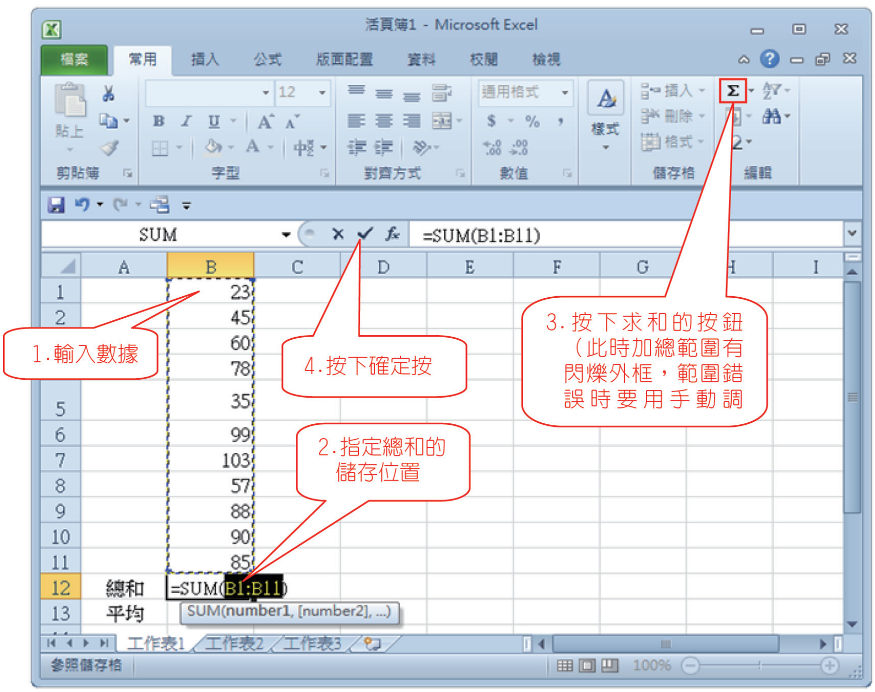
演示 7

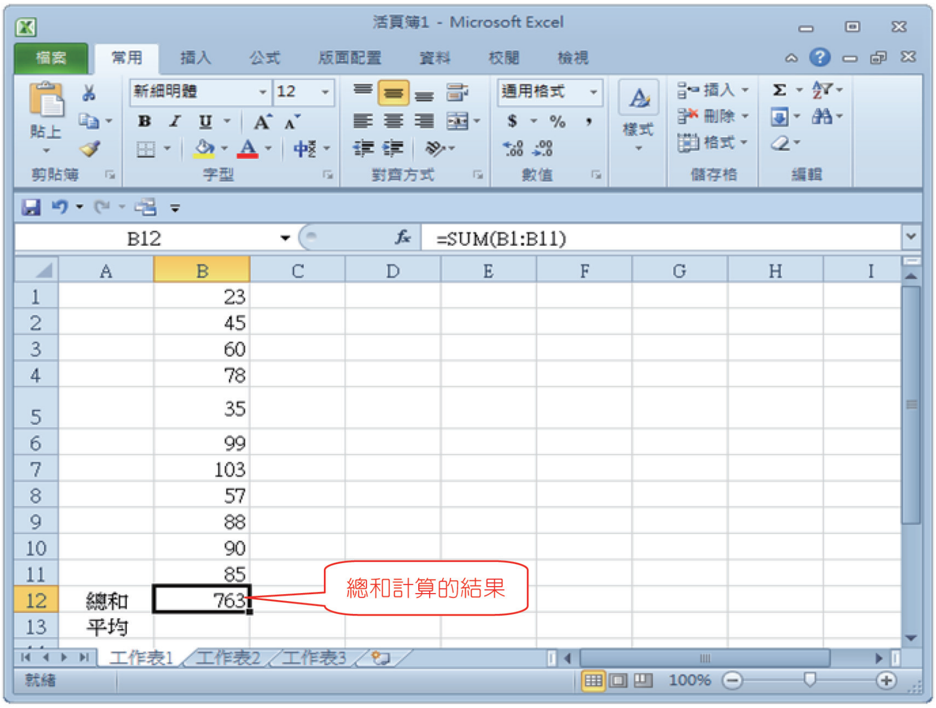
求下列各數的總和及平均（算術平均數）(平均以四捨五入取小數兩位)。

23、45、60、78、35、99、103、57、88、90、85

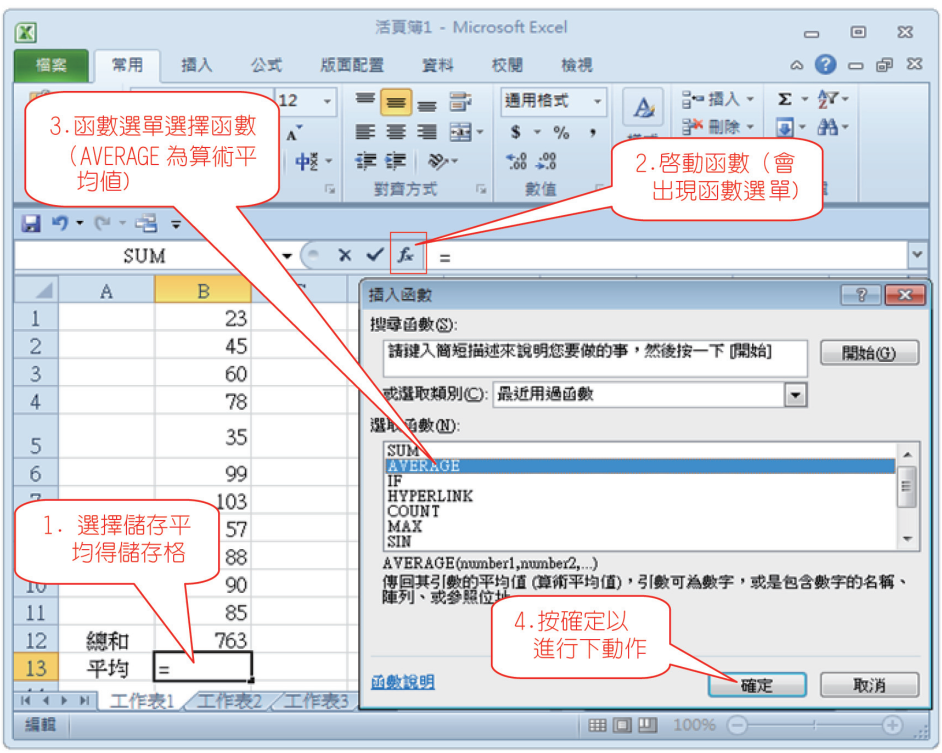
（註：若有 n 個數，把這 n 個數相加後除以 n，所得結果稱爲這 n 個數的算術平均數。）

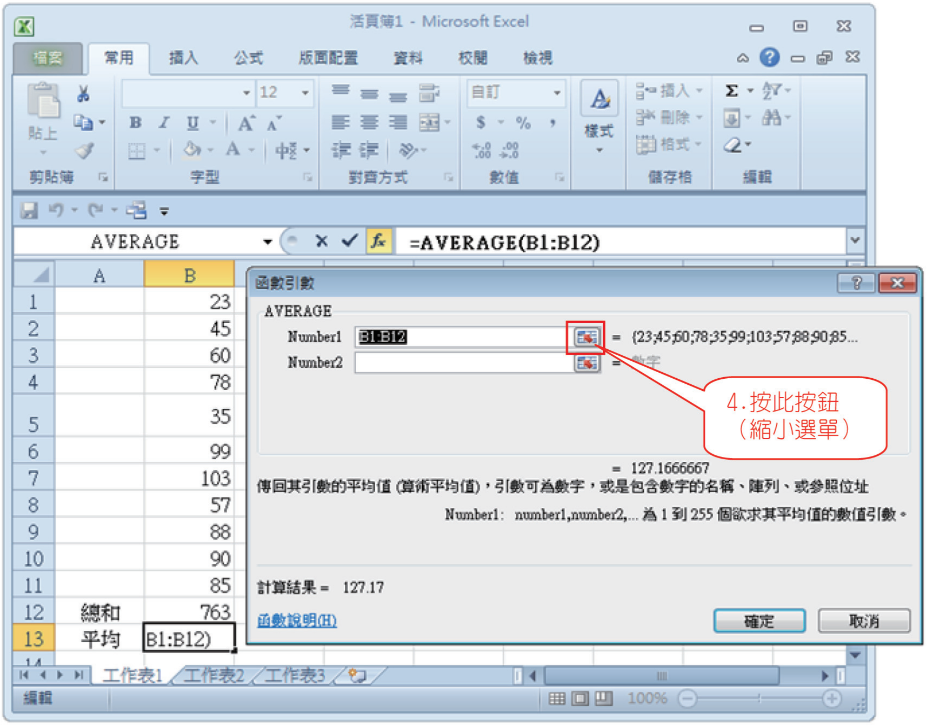
解：(1)首先將各數輸入工作表之儲存格中，然後依圖示說明操作。

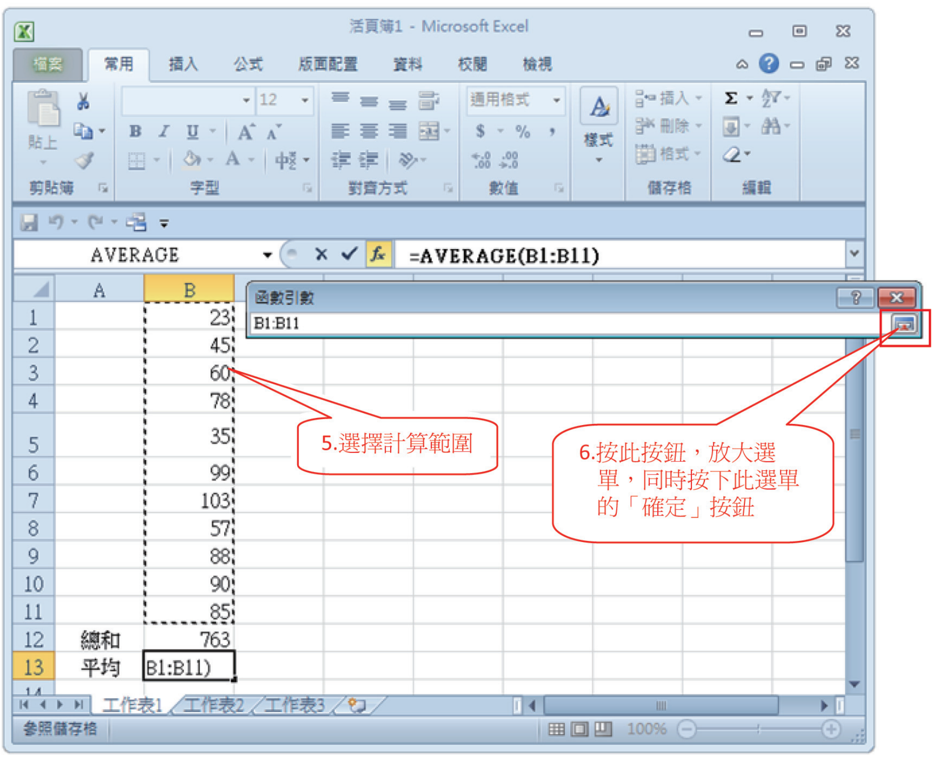


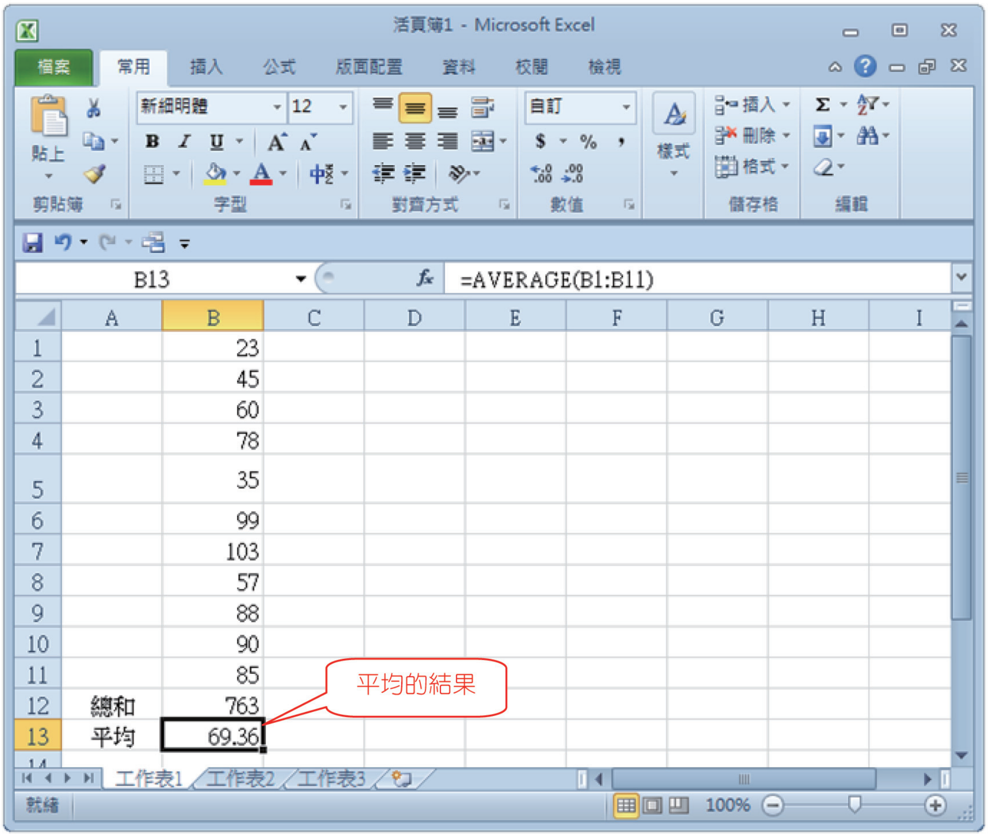


(2)計算平均(利用函數計算)




活頁簿1 - Microsoft Excel
=AVERAGE(B1:B12)
函數引數
AVERAGE
Number1 B1:B12
Number2
= 127.1666667
傳回其引數的平均值 (算術平均值)，引數可為數字，或是包含數字的名稱、陣列、或參照位址
計算結果 = 127.17
確定
取消
4.按此按鈕
（縮小選單）


活頁簿1 - Microsoft Excel
=AVERAGE(B1:B11)
函數引數
B1:B11
5.選擇計算範圍
6.按此按鈕，放大選
單，同時按下此選單
的「確定」按鈕



答：(1)總和是 763 (2)平均是 69.36

自我練習 7

求下列各數的總和及平均（算術平均數）(平均以四捨五入取小數兩位)。

78、56、45、86、99、256、65、80、102、95、100

1-2 自我挑戰

請利用計算機或電腦應用軟體計算下列各題：

1. 試求下列各式：

(1) $1040 - 125 + (225 \div 75) - 12 =$ ？

(2) $45 \times 23 - (315 \div 15) + (50 - 75) + 6 =$ ？

(3) $a = \dfrac{-3-\sqrt{5}}{4}$，$a =$ ？（以四捨五入取小數兩位）

(4) $105 \div 3 + 103 \times 7 - (55 - 75) \times 3 =$ ？

(5) $(150 - 95) \div 5 \times (55 - 10) - 100 =$ ？

2. 設 $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$，且 $a = 4$，$b = -5$，$c = -3$，試求 x。（以四捨五入取小數兩位）

3. 求 $15 \times 5 \div 3 + 17 \times 13 \times 2 + 23 \times 27 + 75 \times 71 + 241 \times 39 =$ ？

4. 某廠商進口一台汽車成本為 850000 元，出售時需加貨物稅 12%，請問此台汽車的售價為多少？

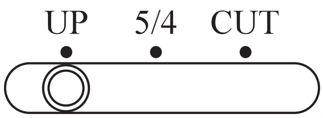
5. 利用電腦應用軟體，試求下列各數的總和及算術平均（平均以四捨五入取小數兩位）。

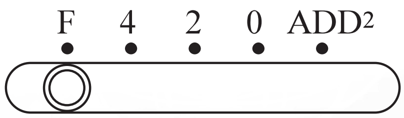
82、65、75、86、97、56、68、80、101、97、245

本單元重點整理

1. 常數多項式 a：(1) $a \neq 0$：零次多項式。
   (2) $a = 0$：零多項式。
2. (1)降冪排列：按照不定元的次方由大到小排列，稱爲降冪排列。
   (2)升冪排列：按照不定元的次方由小到大排列，稱爲升冪排列。
3. 多項式相等：兩多項式相等，則其次數相同，且各同類項係數對應相等。
4. 多項式的加、減：將其同類項的係數相加、減。
5. 計算機按鍵功能

按 鍵	功　　能
%	計算除法時結果以百分數顯示。
AC	啓動計算器及全部清除（不清除記憶體的數值）。
C 或 CE	將螢幕最後顯示的數值清除爲零。
MR	顯示記憶體中之數值於螢幕。
MC	清除記憶體中的資料。
M+	將輸入的數值與記憶體中的數值相加，並將結果儲存。
M-	將記憶體中的數值減去輸入(螢幕)的數值，並將結果儲存。
OFF	關閉電源。
√	將螢幕上的數值開平方。
◀ 或 ▶	退位修正(刪除最後輸入的數字)。
+/-	性質符號。
GT	將連續運算的計算式結果(按=或%後)加總(累加)。
ON	開啓電源





UP：無條件進位。

5/4：四捨五入。

CUT：無條件捨去。

F ：正常浮動小數位數。

4 2 0：小數點位數設定為 4、2、0 位。

ADD2：於加減運算中，不必按小數點，按＋或－ 後，自動將最後兩位數設定為小數 2 位。

notes
心得筆記欄

單元 2

度量與估測

2－1　估測與估計

2－1.1 估測

2－1.2 準確值與估計值

2－1.3 誤差值

2－2　度量的應用

2－2.1 度量單位關係

2－2.2 實例應用

單元二　度量與估測

日常生活中常見到有人將手掌張開，在桌子邊緣比一比，然後就說這桌子長多少尺；在屋前走一走，就說這屋子面寬多少公尺；用手提裝米的袋子，就說這袋子的米多少斤…，像這樣利用已知長度的物件，來估算其他物件的長度，或依自己的經驗估算物體重量等，就叫估測。前台灣省糧食局長李連春（台南後壁 1904－2001），他對糧產的「目測」能力很高明，每到一地，在田間一站，放眼四周稻田，便可以估計出當地收成如何！只要學會這些方法，並妥善運用，你將是第二個李連春喔！

還有汽車沒有汽油了，到加油站加油 20 公升，那 20 公升是幾加侖？有人說我家房子有 100 坪大，100 坪是多少平方公尺？這些都是度量單位的不同，必須經過換算才能獲得答案。如何換算？本單元將利用學習過的度量基礎，透過生活上的問題，使同學熟稔換算的技巧，俾能廣泛應用於日常生活中。

2－1　估測與估計

2－1.1 估測

「估測」就是不用測量儀器，估計出物體的長度、高度、重量等的測量方法。估測要準確，必須累積各種經驗和知識，並運用一些測量技巧。我們用度量衡儀器來測量任何物件，由於儀器都有最小度量單位，無法達到百分之一百精確，僅能依照需求儘量精確。譬如：計算一個區域的人口數，以百萬爲單位，我們只要知道幾百萬人就可以，百萬以下的幾萬幾千人口數我們

就忽略不予計算。如 2017 年時，台北市 390 餘萬人口數，彰化縣有 129 萬多人口數，而說台北市有 4 百萬人，彰化縣有 1 百萬人，實際上台北市人口比 4 百萬少，彰化縣人口數多於 1 百萬；估測單位改變，估測值就會有差異。所以估計的數據都是概數（近似值），其精確度與使用的單位有密切的關係。

　　我們常以「身高」、「手掌寬度」、「腳步寬度」、「兩手伸直的長度」…等等，作爲測量的基準。這種隨身的測量長度工具，一般又稱之爲「永備尺」。常用的估測方法有很多，現在介紹數個測量高度、距離、重量的估測法供大家學習研究；計有：步數測距法、等腰三角測高法、相似三角測距法、相似三角測高法、比重測重法。

一、步數測距法

步數測距法乃利用走路或跑步的兩腳伸開的長度和步數，以估測距離的長短。

即：兩腳伸開的長度× 步數＝距離

演示 1

某生每天從家到校約要步行 1000 步，如果步長是 65 公分，請問家至學校的距離是多少公尺？他每天上下學走多少公里？

解：$65\times 1000=65000$（公分）＝650 公尺

$650\times 2=1300$（公尺）＝1.3 公里

答：⑴家至學校的距離是 650 公尺，⑵上下學走 1.3 公里。

自我練習 1

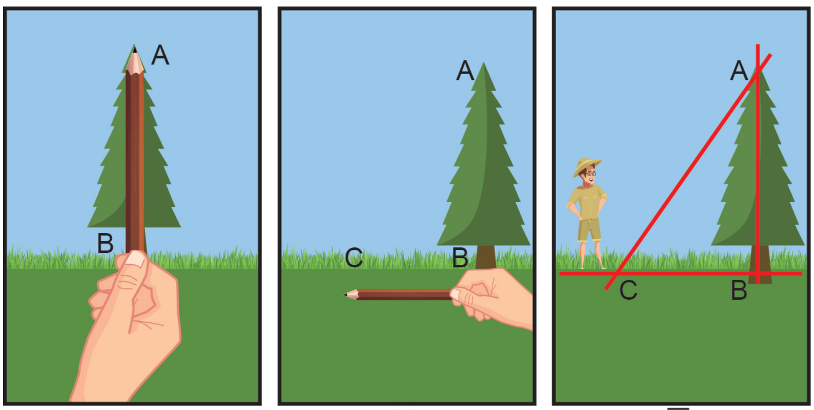
小英的步長為 60 公分，她從家裡走到菜市場，共走 750 步，請問家裡到菜市場的距離是多少公尺？

二、等腰三角測高法

等腰三角法乃利用等腰三角形的原理，測量某一物體的高度；現以估測一樹的高度為例。

作法：

1. 拿一枝尺或筆，對準樹幹，手臂向前平伸。
2. 閉上一隻眼睛，以單眼向前平視，筆尖對準樹尖 A，筆身某一點對準樹根，做記號 B，如下圖(一)。
3. 以筆上的記號 B 為中心，向左或向右橫放，如下圖(二)，視線透過筆的尖端所看到的一點 C（C 點必須在樹左或樹右兩側），請一位同學站在 C 點，如下圖(三)。
4. 測量 B、C 之間實際的直線距離就是樹高了。



一　　二　　三

說明：因爲 $\triangle ABC$ 爲等腰三角形，即$\overline{AB}=\overline{BC}$，所以只要測量$\overline{BC}$就是樹高了。

實務演習

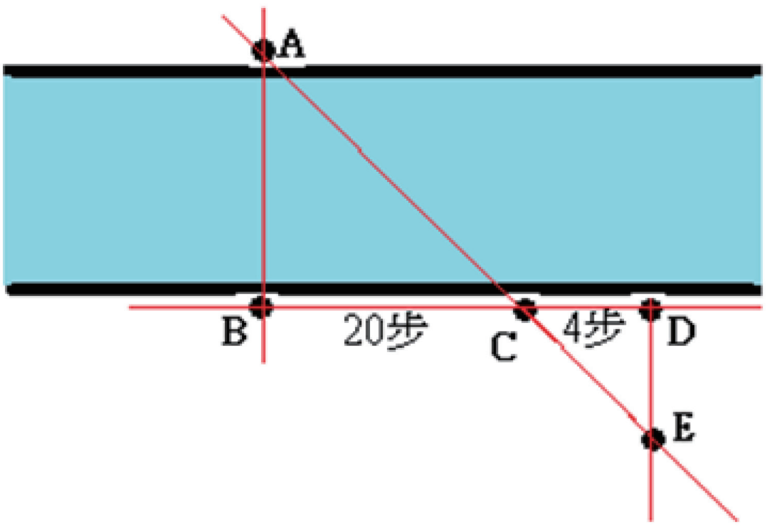
請利用等腰三角測高的要領，在就讀的學校內，選擇一顆最高樹，估測樹的高度。

三、相似三角測距法

無法以步伐測出距離時，就可以利用相似三角的原理估測此距離，現以估測河寬爲例。

作法：

1. 如下圖，先找出對岸目標 A 點（目標明顯的樹、大石塊…）。
2. 再找出本岸對應的 B 點，直視 A 點。
3. 由 B 點，沿 $\overline{AB}$ 的垂直線，順著河邊走 20 步（步數可自行設定），做個記號，爲 C 點。
4. 由 C 點再向前走四步（爲原設定步數的五分之一），即爲 D 點。
5. 沿 $\overline{CD}$ 的垂直線，背河前進到能望見 C 與 A 成一直線時爲止，得 E 點。
6. 測量 $\overline{DE}$ 的長度，河寬即爲 $\overline{DE}$ 的五倍長。



說明：因為 $\triangle ABC$ 和 $\triangle EDC$ 相似，對應邊成比例，

即 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{\overline{BC}}{\overline{CD}}$，又$\overline{BC}=20$ 步，$\overline{CD}=4$ 步

$\Rightarrow\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\dfrac{20}{4}=\dfrac{5}{1}$ （所取的步數要成整數倍）

$\Rightarrow\overline{AB}=5\overline{DE}$

實務演習

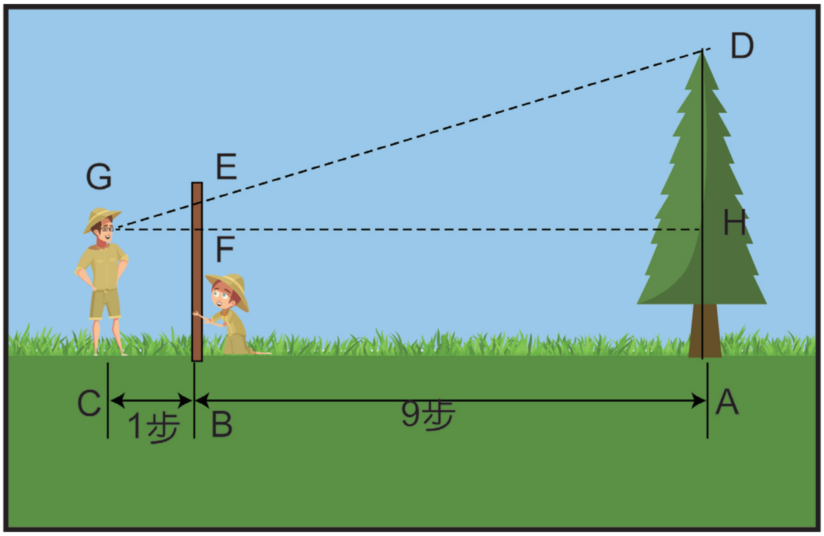
利用相似三角測距的方法，測量住家附近河川的寬度。

四、相似三角測高法

利用相似三角的原理估測高度，現以測量樹的高度例。

作法：

1. 如下圖，從樹下一點 A，背對樹幹向前走 9 步，設為 B 點，豎一棍子（棍子要比人高）。
2. 豎好棍子，從 B 點向前一步，設為 C 點。
3. 站在 C 點，望向樹梢 D，視線通過棍子的那點做上記號，是為 E 點。
4. 站在 C 點，兩眼平視，視線與棍子相交點，做上記號，是為 F 點。
5. 量出 $\overline{EF}$ 的長度。
6. 樹高 $=\overline{BF}+\overline{EF}\times 10$



說明：因為△GEF 和△GDH 相似，對應邊成比例，

$\dfrac{\overline{EF}}{\overline{DH}}=\dfrac{\overline{GF}}{\overline{GH}}$，$\overline{GF}=\overline{CB}$；$\overline{GH}=\overline{CA}$，

又$\overline{CB}=1$(步)，$\overline{CA}=10$(步)，

即 $\dfrac{\overline{EF}}{\overline{DH}}=\dfrac{\overline{GF}}{\overline{GH}}=\dfrac{\overline{CB}}{\overline{CA}}=\dfrac{1}{10}$，$\Rightarrow \overline{DH}=10\overline{EF}$，

樹高$=\overline{HA}+\overline{DH}=\overline{HA}+10\overline{EF}$，又$\overline{HA}=\overline{BF}$

故樹高$=\overline{BF}+10\overline{EF}$

實務演習

利用相似三角測高的方法，估測校內或校外某一樹或物體的高度。

五、比重測重法

利用比重計算重量的算法是「體積× 比重」，所以只要知道各材質的比重，及測出此物體的體積，就可以計算出重量了；即：

物體的重量＝體積× 比重

演示 2

有一長方體鐵塊，測得鐵塊的長、寬、高，分別爲 $50cm$、$45cm$、$20cm$，則此鐵塊的重量爲多少公噸？（鐵的比重爲 7.86）

註：比重就是一物體與同體積 4°C 水重量的比值。如：一物體的比重為 1.2，即此物體 1 立方公分重 1.2 公克。

解：$50 \times 45 \times 20 \times 7.86 = 353700$（公克）

$= 353.7$ 公斤 $= 0.3537$ 公噸

答：此鐵塊重 0.3537 公噸。

自我練習 2

今有鋁板一塊，它的長、寬、厚度，分別爲 $750cm$、$60cm$、$10cm$，則此鋁板的重量是多少公斤？（鋁的比重爲 2.72）

2 – 1.2 準確值與估計值

測量的數值無法獲得百分百的眞值（準確值），使用精密的電子儀器測量也是不能獲得眞值，因爲測量不僅和測量工具精密度有關，也會受到環境與測量者的影響。測量的數值是由準確值與估計值組成，準確值與估計值由測量工具刻度的單位決定，可由刻度測得的爲準確值，無法由刻度測得的，需測量人員目測的爲估計值，估計值只有一位數；例如：102.78，其中 102.7 是準確值，0.08 是估計值；而 10589，其中 10580 是準確值，9 是估計值。使用電子儀器來測量，同樣最後一位數仍爲估計值，所以整個測量數值的最後一位數稱爲估計值，估計值之前的都是準確值。

演示 3

有一直尺的刻度爲毫米（mm），小玉使用此直尺測量一書本的長度，其結果爲 16.35cm，請問準確值是多少？估計值又是多少？

解：此數值的準確值爲 16.3；估計值爲 0.05。

自我練習 3

某人使用小數點以下四位的電子天平，測得一物體的重量爲 30.1245g，請問準確值是多少？估計值又是多少？

演示 4

新北市的人口有 398 萬人，請問其估算單位爲多少？其準確數值是多少？估計數值又多少？

解：估算單位爲萬人；

所以準確值是 390，估計值是 8。

自我練習 4

某報頭條新聞，標示「少子化的影響，中部某縣人口數跌至 129 萬人」，請問此數據的準確數值是多少？估計數值又是多少？

2-1.3 誤差值

對任何一個物理量進行的測量都不可能得出一個絕對準確的數值。使用測量技術所能達到的最完善的方法，測出的數值也和眞值存在差異，這種測量值和眞值的差異稱爲誤差。

誤差的原因可能有儀器、採用方法、人員或環境所導致。譬如：天平的兩臂應是等長的，但實際上是不可能完全相等的；天平配置的相同質量的砝碼應是一樣的，但實際上它們不可能達到一樣。測量者讀數錯誤、記錄錯誤、測量時發生異常情況的疏忽等等，都會降低測量的準確度。

誤差值分爲**絕對誤差**和**相對誤差**，絕對誤差就是測量值與眞值之差；相對誤差爲絕對誤差的絕對值和眞值的比值，常以百分比（%）表示。即：

絕對誤差＝ 測量值－眞值。

$$相對誤差=\frac{|測量值-眞值|}{眞值}\times 100\%$$

「測量值」：就是我們實際去測量到的數值；可以是單一測量值或多次測量值的平均值。

「眞值」：就是眞正的「物理量」或爲「理論值」，就是我們依照既有的物理理論模型及公式推導歸納出來的物理量，是一個推論出來的眞值。

若測量結果大於眞值時，絕對誤差爲正，反之爲負，而相對誤差能反映測量的可信程度，相對誤差越小，測量值的可信度就越高。

演示 5

老劉購買一塊土地，其所有權狀標示其面積爲 390 平方公尺，老劉請人測量結果爲 389.7 平方公尺，請問其絕對誤差是多少？相對誤差是多少？

解：絕對誤差：$389.7-390=-0.3$

相對誤差：$\dfrac{|389.7-390|}{390}\times 100\%=0.077\%$

自我練習 5

一位父親贈給女兒一棟房屋，所有權狀標示其建坪爲 62 坪，他的女兒請人測量結果爲 62.04 坪，請問其絕對誤差是多少？相對誤差是多少？

2-1 自我挑戰

選擇題：

(　　)1. 甲生的走路兩腳張開的長度爲 60 公分，他從自家走到最近車站，共走了 1750 步，則甲生的家到最近車站有多少公尺？
(A) 1200　(B) 1100　(C) 1050　(D) 1350 公尺。

(　　)2. 下列敘述那一個是正確的？　(A)測量的數值是由準確值與估計值組成　(B)測量的數值由準確值與眞值組成　(C)測量的數值的最右一位數爲準確值　(D)使用精密儀器測量就沒有估計值。

(　　)3. 若一個測量的數值爲 38.25，則其準確值爲
(A) 0.05　(B) 38.2　(C) 38.24　(D) 38.30。

(　　)4. 若一個測量的數值爲 24.56，則其估計值爲
(A) 24　(B) 24.5　(C) 0.06　(D) 0.56。

(　　)5. 若一個測量的數值爲 1385，則其準確值爲
(A) 1385　(B) 1380　(C) 5　(D) 85。

(　　)6. 若一個測量的數值爲 1563，則其估計值爲
(A) 1560　(B) 63　(C) 1500　(D) 3。

(　　)7. 某人有塊土地所有權狀標示爲 289 坪，經測量結果爲 287 坪，請問其相對誤差爲
(A) 2 坪　(B) −2 坪　(C) 0.69%　(D) 280 坪。

(　　)8. 某人有塊土地所有權狀標示爲 300 坪，經測量結果爲 302 坪，

請問其絕對誤差為　(A) 2 坪　(B) −2坪　(C) 0.67%　(D) 300 坪。

(　　) 9. 如果要判斷測量數值的可信度，可以依照下列那一個數據判斷？　(A) 絕對誤差　(B) 相對誤差　(C)估計值　(D)準確值。

2－2 度量的應用

度量在我們日常生活中具有相當重要的地位，舉凡購物、居住場所的丈量、交通工具的使用、空氣品質的估測、身體各種的數據…等等，都與我們息息相關。度量的應用受限於篇幅我們僅能介紹其中一二；希望同學能廣泛的學習，多聽、多看、多做，且能舉一反三，未來能應用於生活與工作中。

2－2.1 度量單位關係

下列將介紹常用的**長度**、**面積**、**容積**、**體積**、**重量**的度量單位，各種不同單位之間的相互關係，供使用時參考。

一、長度單位相互關係

1 公里＝0.62137 哩　【1 哩≒1.6 公里】

1 公尺＝3.28084 呎　【1 呎≒0.3 公尺】

1 公分＝0.3937 吋　【1 吋≒2.54 公分】

1 碼≒0.9 公尺

1 公尺＝ 3.3 尺　【1 尺≒0.303 公尺】

1 尺≒ 30 公分

1 寸≒ 3 公分

二、面積單位的相互關係

1 公頃＝1.03102 甲　【1 甲≒0.96992 公頃】

1 平方公尺＝0.3025 坪

1 坪＝6 尺 × 6 尺（民間口語爲 6 尺見方）

＝3.30579 平方公尺

三、容積、體積單位的相互關係

1 立方公尺＝1000 公升

1 公升＝1000ml＝1000cm^3（1ml＝1$c.c.$＝1cm^3）

1 加侖＝3.78537 公升 （民間常用 1 加侖≒4 公升）

四、重量單位的相互關係

1 公斤＝ 2.2 磅 （1 磅≒453.59 公克）

1(台)斤＝ 0.6 公斤＝ 600 公克 （民間說法爲 3 公斤等於 5 台斤）

1 市斤＝ 500 公克 （市斤僅在金門、馬祖及中國大陸使用）

2 – 2.2 實例應用

演示 1

有 3 面寬 12 尺、高 8 尺的牆要貼壁紙，費用以每坪 200 元計算；請問最少須要花費多少元？

解：一坪＝ 36 平方尺，總面積爲 12× 8× 3＝288 平方尺；

爲 288÷ 36＝8(坪)⇒ 所須費用爲 8× 200＝1600 元

答：最少須要花費 1600 元。

自我練習 1

老王以每坪 25 萬元的價錢，購買了 100 平方公尺土地，請問老王共花了多少錢購買此土地？

演示 2

汽油一公升 30 元，加滿 15 加侖的汽油需要多少錢？

解：15 加侖＝ 15× 3.79 公升＝ 56.85 公升

30× 56.85 = 1705.5 (元)

答：需 1705.5 元。

自我練習 2

若柴油每公升 24 元，加滿 0.3 立方公尺的柴油要花多少錢？

演示 3

某甲以每公斤 60 元價格買進 120 公斤的貨物，再以每台斤 40 元賣出，若全部賣完，某甲是賺或賠多少元？

解：3 公斤＝ 5 台斤，120 公斤＝ 200 台斤

成本是 120× 60 ＝ 7200 (元)，收入是 200× 40 ＝ 8000 (元)

8000 元－ 7200 元＝ 800 元

答：某甲賺 800 元。

自我練習 3

有一中藥商從中國大陸買進一批藥材，共 60 市斤，成本是 23400 元。在台灣一台斤至少要賣多少錢才不會虧本？

演示 4

一個長方形游泳池，長是 25 公尺、寬是 18 公尺、深是 14 公尺，問此游泳池裝滿水需要多少度？若水一度為 9 元，請問此游泳池每換一次水，需多少水費？(水 1 度＝1000 公升)

解：水 1 度＝1000 公升＝1 立方公尺

$25\times 18\times 14=6300$ (立方公尺)，即需水 6300 度

$9\times 6300=56700$ (元)

答：游泳池裝滿水需要 6300 度，換一次水需水費 56700 元。

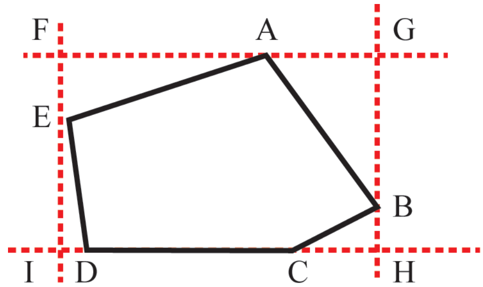
自我練習 4

一個圓形蓄水池，高是 20 公尺、半徑是 15 公尺，問此蓄水池裝滿水需要多少度？（水 1 度＝1000 公升，$\pi=3.14$）

演示 5

若一塊五邊形農地 $ABCDE$，$\overleftrightarrow{FG}$、$\overleftrightarrow{GH}$、$\overleftrightarrow{HI}$、$\overleftrightarrow{IF}$，分別過此五邊形的頂點，並構成長方形 $FGHI$（詳如右圖）；

測得 $\overline{FG}=30$ 公尺，$\overline{AG}=10$ 公尺，$\overline{GH}=20$ 公尺，$\overline{BH}=5$ 公尺，$\overline{HC}=8$ 公尺，$\overline{ID}=3$ 公尺，$\overline{IE}=13$ 公尺，這塊農地（五邊形土地 $ABCDE$）的面積是多少坪？（四捨五入取小數兩位）



解：五邊形土地 $ABCDE$ 面積＝長方形 $FGHI$ 面積－△AFE 面積

－△AGB 面積－△BHC 面積－△DIE 面積

長方形 $FGHI$ 面積爲 $30\times 20=600$

△AFE 面積 $=\frac{1}{2}\times(20-13)\times(30-10)=70$，

△AGB 面積 $=\frac{1}{2}\times 10\times 20=100$

△BHC 面積 $=\frac{1}{2}\times 5\times 8=20$

△DIE 面積 $=\frac{1}{2}\times 3\times 13=19.5$

則五邊形土地 $ABCDE$ 面積 $=600-70-100-20-19.5$

$=390.5$（平方公尺）

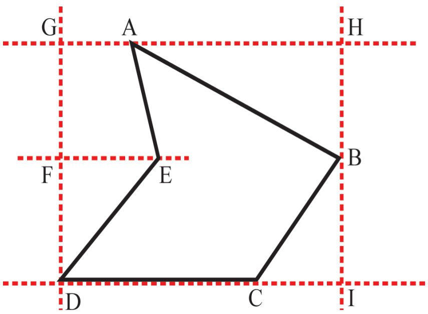
又 1 平方公尺 $=0.3025$ 坪

$0.3025\times 390.5=118.05$（坪）

答：農地面積是 118.05（坪）。

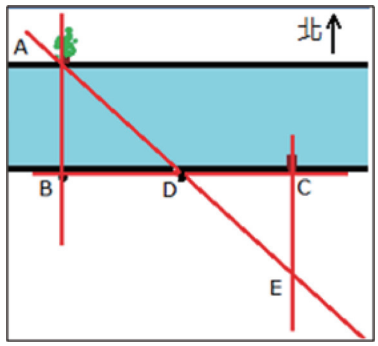
自我練習 5

若一塊花園（五邊形 $ABCDE$），並 $\overleftrightarrow{DG}$、$\overleftrightarrow{GH}$、$\overleftrightarrow{HI}$、$\overleftrightarrow{ID}$、$\overleftrightarrow{FE}$，分別過此五邊形的頂點，並構成長方形 $GHID$（詳如右圖）；測得 $\overleftrightarrow{GH}=40$ 公尺，$\overleftrightarrow{GA}=10$ 公尺，$\overleftrightarrow{HI}=25$ 公尺，$\overleftrightarrow{BH}=12$ 公尺，$\overleftrightarrow{IC}=8$ 公尺，$\overleftrightarrow{FD}=13$ 公尺，$\overleftrightarrow{FE}=12$ 公尺，這花園（五邊形 $ABCDE$）的面積是多少坪？（四捨五入取小數兩位）



演示 6

有一東西向之河流不知寬度；於北岸有一棵樹 A 與南岸岸邊一石塊 B 成一直線且與南岸垂直，由這石塊 B 往東 120 公尺處豎一柱子 C，於石塊與柱子的中點做一記號 D，$\overline{AD}$恰與過 C 點且垂直於$\overline{BC}$的直線相交於 E 處，經測量 D 到 E 的距離為 100 公尺，請問河寬約多少公尺？（詳如下圖）



解：因為 D 為 $\overline{BC}$中點，所以$\overline{DC}=60$ 公尺

又 $\overline{DE}=100$ 公尺，且$\overline{DE}^2=\overline{DC}^2+\overline{CE}^2$

所以$100^2=60^2+\overline{CE}^2$

$\Rightarrow \overline{CE}=80$（公尺）

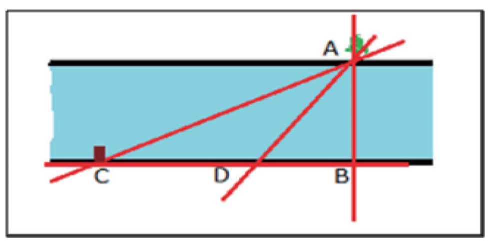
$\triangle ABD \cong \triangle ECD \Rightarrow \overline{AB}=\overline{CE}$

$\Rightarrow \overline{AB}=80$（公尺）

答：河寬 80 公尺。

自我練習 6

甲要估測一河流的寬度，發現在對岸的岸邊有一棵樹，且從 C 點往 D 點走 250 步，則 $\triangle ACD$ 為等腰三角形，再由 D 走 200 步到 B，此時 $\overline{AB}$ 和 $\overline{BC}$ 相互垂直，請協助甲估測這河流的寬度是多少公尺？（假設每一步長為 50 公分）



演示 7

有一鋼鐵廠購買鐵塊 100 塊，每塊為邊長 1 公尺正方體，雇請一輛卡車載運，卡車最大載重為 20 公噸，不得超載，請問要載運多少車次才可以完成？（鐵比重為 7.8）

解：1 公尺＝100 公分

$100\times 100\times 100\times 7.8=7800000$（公克）$=7800$（公斤）$=7.8$（公噸）

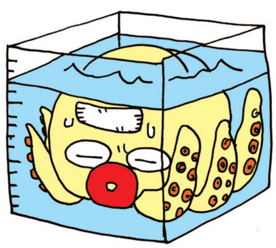
$20\div 7.8\fallingdotseq 2.6$，鐵塊不能切割且不可超載，所以卡車每次只能載 2 塊

$100\div 2=50$（車次）

答：需載運 50 車次。

自我練習 7

某人經營運輸業，某日標下搬運 150 塊金屬塊之工作，此金屬塊為長 2 公尺，寬 3 公尺，高 50 公分的長方體，且比重為 1.5。某人有可載重 25 公噸的卡車 1 輛，若卡車每天可載運 2 次，請問幾天可載運完畢？



演示 8

每天的活動行爲都會排放出二氧化碳，依據「清淨家園顧厝邊綠色生活網」及「環境品質文教基金會」的研究數據，用水、電、瓦斯、汽油等的二氧化碳排放量爲：

使用物品	使用量	二氧化碳排放量
柴油	1 公升	2.61 公斤
汽油	1 公升	2.26 公斤
水	1 度	0.2 公斤
瓦斯	1 公斤	1.75 公斤
天然氣	1 m^3	2.1 公斤
電	1 度	0.64 公斤
一棵 20 年生的樹一天約可以吸收 0.03 公斤二氧化碳		

某家庭一天平均用電 6 度，用水 2 度，使用天然氣 1 m^3，開汽車上下班每天耗汽油 20 公升，依據上述之二氧化碳排放的數據，請問這家庭

(1)每天約排放多少公斤的二氧化碳？(四捨五入取小數兩位)

(2)若每個月上班 20 天，則每月(20 天)約排放多少公斤的二氧化碳？

(3)一棵 20 年生的樹，每天約可吸收 0.03 公斤的二氧化碳，請問這家庭一天排放的二氧化碳需要幾棵樹才能吸收？（樹木計量無條件進位取整數）

解：$0.64\times 6+0.2\times 2+2.1\times 1+2.26\times 20=51.54$(公斤)

$51.54\times 20=1030.80$(公斤)

$51.54\div 0.03=1718$(棵)

答：(1)每天約排放 51.54 公斤二氧化碳，

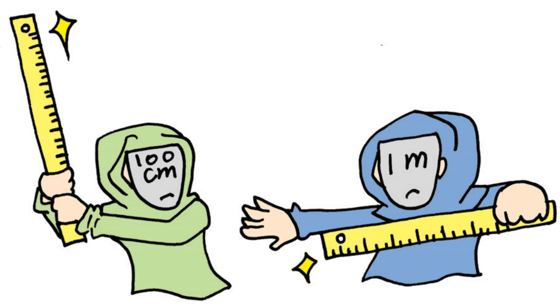
(2)每月(20 天)約排放 1030.80 公斤二氧化碳。

(3)一天排放的二氧化碳約需要 1718 棵才能吸收。

自我練習 8

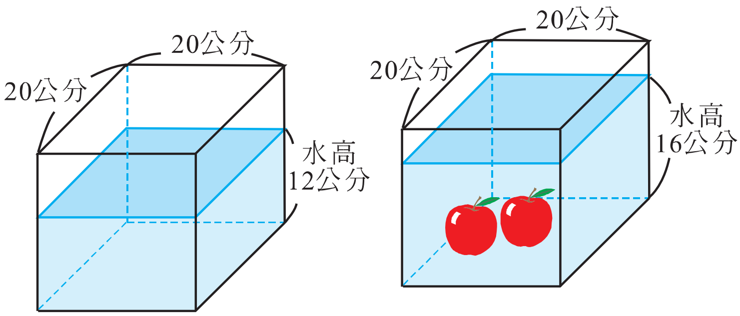
某一家庭一個月用電 206 度，用水 75 度，使用桶裝瓦斯 40 公斤，汽車使用 95 汽油 330 公升，請問這家庭⑴每月約排放多少公斤的二氧化碳？(四捨五入取小數兩位)。⑵至少需要幾棵 20 年生的樹，才能吸收這家庭每月排放的二氧化碳？（樹木計量無條件進位取整數。）

使用物品	使用量	二氧化碳排放量
柴油	1 公升	2.61 公斤
汽油	1 公升	2.26 公斤
水	1 度	0.2 公斤
瓦斯	1 公斤	1.75 公斤
天然氣	1 m^3	2.1 公斤
電	1 度	0.64 公斤
一棵 20 年生的樹一天約可以吸收 0.03 公斤二氧化碳		



2-2 自我挑戰

1. 一個方形盒子，裡面長 20 公分、寬 20 公分，裝水高度 12 公分，置入 2 顆一樣大的蘋果後，水的高度升到 16 公分，請問一顆蘋果的體積是多少立方公分？



2. 有一個長方形木箱，長 3 公尺、寬 2.5 公尺、深 5 公尺，裝滿了米，若米每公升市價爲 20 元，則此木箱中的米共價値多少元？(1 立方公尺＝1000 公升)
3. 有一個池塘，長 25 公尺、寬 12 公尺、深 1 公尺，要用砂石塡滿這個池塘，如果用 1 輛可裝載 15 立方公尺的卡車搬運，最少要搬運幾次才可塡滿？
4. 菜販購買蔬菜一批，胡蘿蔔 30 公斤，每公斤 15 元；四季豆 60 公斤，每公斤 25 元；高麗菜 120 公斤，每公斤 45 元；若蔬菜均沒有耗損，胡蘿蔔以每台斤 15 元賣出，四季豆以每台斤 25 元賣出，高麗菜以每台斤 45 元賣出，全部賣完，請問菜販賺或賠多少錢？
5. 有一中藥房以每台斤 1600 元購買高麗人蔘 20 台斤，零售是每兩 200 元，請問此中藥房要賣多少台斤，成本才回收？（1 台斤＝16 兩）
6. 甲就讀學校的圍牆要請工人重新粉刷；報價爲每坪 300 元，若圍牆長 50 公尺、高 1.2 公尺，問至少要編列多少預算？
7. 有一家庭平均一個月用電 106 度，用水 45 度，使用天然氣25m^3，汽車使

用柴油 230 公升，請問這家庭一個月約排放多少公斤的二氧化碳？請問每月排放的二氧化碳需要幾顆 20 年生的樹才能吸收？（請依據下表數據計算，結果以四捨五入取小數兩位，樹木計量無條件進位取整數。）

使用物品	使用量	二氧化碳排放量
柴油	1 公升	2.61 公斤
汽油	1 公升	2.26 公斤
水	1 度	0.2　公斤
瓦斯	1 公斤	1.75 公斤
天然氣	1 m^3	2.1　公斤
電	1 度	0.64 公斤
一棵 20 年生的樹一天約可以吸收 0.03 公斤二氧化碳		

本單元重點整理

- 「估測」就是不用測量儀器，估計出物體的長度、重量、高度等的測量方法。
- 測量的數值是由準確值與估計值組成，準確值與估計值由測量工具刻度的單位決定，可由刻度測得的爲準確值，無法由刻度測得的，需測量人員目測的爲估計值，估計值只有一位數。
- 誤差值分爲絕對誤差和相對誤差。絕對誤差就是測量值與眞值之差；相對誤差爲絕對誤差和眞值的比值，常以百分比（%）表示。即：

  絕對誤差＝ 測量值－眞值。

  $$相對誤差=\frac{|測量值-眞值|}{眞值}\times 100\ \%$$

  「測量值」：就是我們實際去測量到的數值；可以是單一測量值或多次測量值的均值。

  「眞值」：就是眞正的「物理量」或爲「理論值」，就是我們依照既有的物理理論模型及公式推導歸納出來的物理量，是一個推論出來的眞值。

notes
心得筆記欄

單元 3

坐標與直線

單元三 坐標與直線

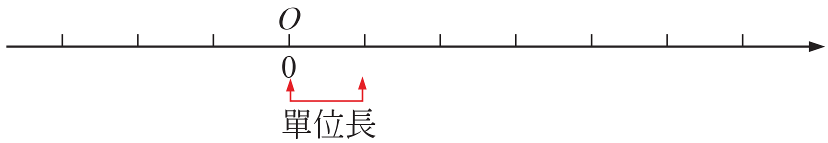
坐標在日常生活中的使用相當的廣泛，如道路的位置的標示、航海、航空、測量、颱風的定位…等等都與坐標密切相關。生活中各圖形的構造都以直線爲基礎，線條之美豐富了我們的生活，所以直線與生活是密不可分的。本單元將逐一介紹直角坐標及直線方程式的基本概念及其重要的性質，以引導更寬廣的學習，使能了解直角坐標和直線在生活中的應用。

3－1 直角坐標

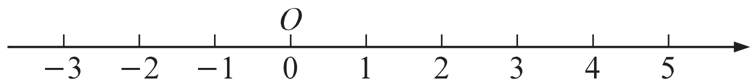
3－1.1 數線

一、數線的定義

在國中學過數線，所謂數線就是將實數與一條線做對應，即每一個實數都有線上一點來對應，此實數就稱爲該點的坐標。畫一條直線，在直線上取一點 O 當作基準點（一般稱之爲原點），此基準點向右爲正向，以箭頭（→）表示；此基準點向左爲負向，爲了避免混淆，不以箭頭表示負向。這個 O 點所代表的數是 0，我們就會在 O 點的下方標示 0，並稱 O 點的座標爲 0，以 $O(0)$ 來表示。然後以適當且固定的長度當作一個單位（稱爲單位長）。這一具備原點、方向（正向箭頭）和單位長的直線就稱之爲數線，如下圖所示。



在數線上由原點O往正向，每隔一單位長做一刻度，依序標示 1、2、3、…；並從原點O往負向，每隔一單位長做一刻度，依序標示－1、－2、－3、…，如下圖所示。

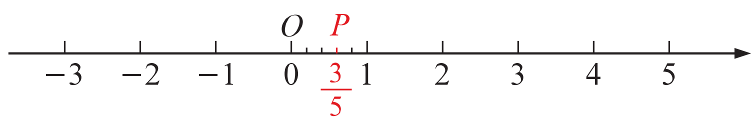


從以上的圖示可以看出：一條水平的數線，原點向右為正，愈往右邊所代表的數愈大，愈往左邊所代表的數愈小。

當然除了整數以外，分數與小數也可以標示在數線上的。也就是說，給定了一個數，就可在數線上找到一個點來表示這個數。例如：

(1)在數線上標示代表$\frac{3}{5}$的數

因為 $0<\frac{3}{5}<1$，所以我們可將數線 0～1 之間的長度分為 5 等分，則由左而右的四個等分點分別代表 $\frac{1}{5}$、$\frac{2}{5}$、$\frac{3}{5}$、$\frac{4}{5}$，如下圖所示。P點所代表的數即是$\frac{3}{5}$，所以我們就稱P點的坐標是 $\frac{3}{5}$，記為$P\left(\frac{3}{5}\right)$。

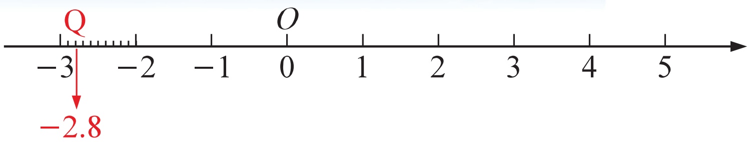


(2)在數線上標示代表－2.8 的數

因為$-3<-2.8<-2$，所以我們可將數線$-2\sim-3$之間的長度分為 10 等分，則由右而左的 9 個等分點，分別代表

－2.1、－2.2、－2.3、－2.4、－2.5、－2.6、－2.7、－2.8、－2.9

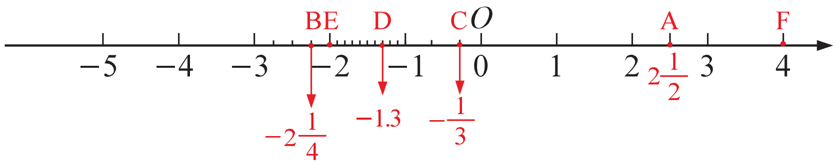
，如下圖所示。Q點所代表的數即是－2.8，記為$Q(-2.8)$。



演示 1

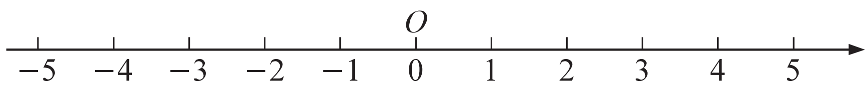
請在下面的數線上，分別標出表示 $A\ (2\frac{1}{2})$、$B\ (-2\frac{1}{4})$、$C\ (-\frac{1}{3})$、$D\ (-1.3)$、$E\ (-2)$、$F\ (4)$的點。

解：



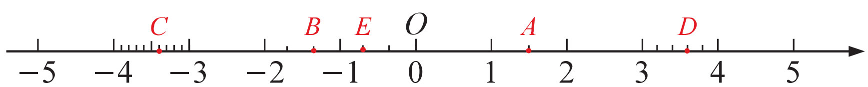
自我練習 1

在下面的數線上，分別標出表示 -5、2、$-1\frac{1}{3}$、3.2、$4\frac{3}{4}$ 的點。



演示 2

如下圖，請分別寫出數線上 A、B、C、D、E 各點的坐標：

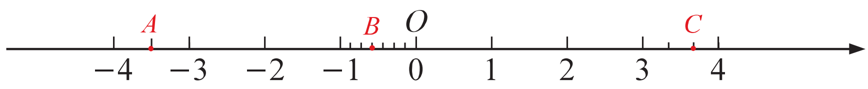


A(　)、B(　)、C(　)、D(　)、E(　)。

解：$A\ (1\frac{1}{2})$、$B\ (-1\frac{1}{3})$、$C\ (-3\frac{4}{10})$、$D\ (3\frac{3}{5})$、$E\ (-\frac{2}{3})$

自我練習 2

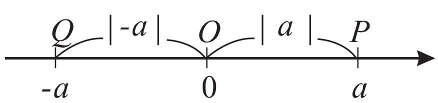
如下圖，請分別寫出數線上 A、B、C 各點的坐標：
A(　　)、B(　　)、C(　　)。



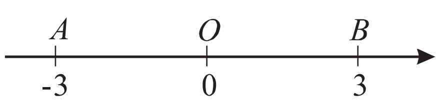
二、數線上兩點的距離

前面我們學了如何利用數線表示位置，接著，我們將介紹數線上兩點之間的距離。距離若搭配其他物理量的計算，如運動學、功、…等，更可廣泛的應用於日常生活中。

在數線上表示一個數的點與原點的距離，叫做這個數的絕對值，以符號〝｜　｜〞表示，如 $|4|=4$，$|-2|=2$，$|0|=0$。若不看性質符號，只看數字部分，則這個數字部分剛好是這個數在數線上與原點的距離，也就是這個數的絕對值。下圖所示，P、Q 的坐標分別為 a、$-a$，與原點的距離皆為 a，所以 $|a|=|-a|=a$。



若要表示數線上兩個點 $P(a)$、$Q(b)$ 之間的距離 $\overline{PQ}$，則 $\overline{PQ}$ 以 $|a-b|$ 或 $|b-a|$ 表示。如下圖 $A(a)$、$B(b)$ 之間的距離 $\overline{AB}=|3-(-3)|=6$ 或 $|-3-3|=6$ 表示。



演示 3

數線上有一點的坐標爲 x，若 $|x|=7$，則 x 是多少？

解：$|x|=7\Rightarrow$ 表示與原點距離爲 7 的點，在數線上有 -7 與 7 兩點

$\Rightarrow x=-7$ 或 7

自我練習 3

數線上有一點的坐標爲 y，若 $|y|=4.5$，則 $y=$？

演示 4

數線上有一點的坐標爲整數 p，若 $|p|\leq 3$，則滿足此條件的整數 p 有多少個？

解：$|p|\leq 3$ 表示 p 與原點的距離小於或等於 3 的點，且 p 坐標爲整數

$\Rightarrow p=-3$、-2、-1、0、1、2、3 共有 7 個。

自我練習 4

數線上有一點的坐標爲整數 Q，若 $|Q|\leq 5$，則滿足此條件的整數 Q 有多少個？

演示 5

數線上有兩個點分別爲 $A(-3)$、$B(6)$，則 A、B 兩點之間的距離 $\overline{AB}=$？

解：$A(-3)$、$B(6)\Rightarrow\overline{AB}=|6-(-3)|=|6+3|=9$

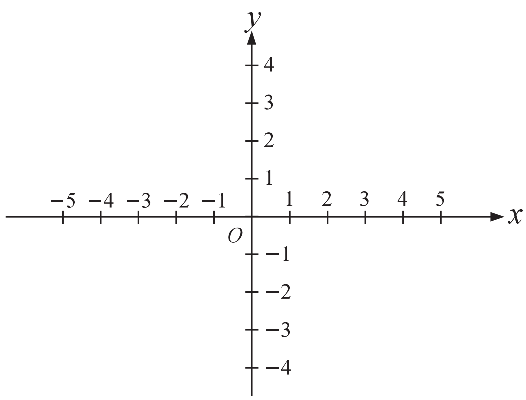
自我練習 5

數線上有兩個點分別為 $P(-3\frac{1}{3})$、$Q(2\frac{1}{2})$，則 P、Q 兩點之間的距離 $\overline{PQ}=$ ？

3－1.2 直角坐標

一、認識直角坐標

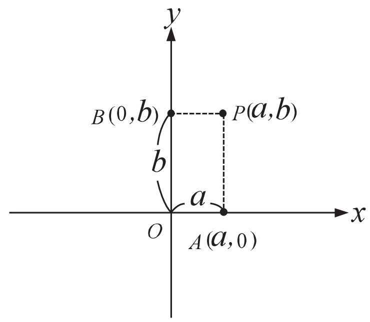
在同一平面上，做兩條單位長相等的數線，使互相垂直且相交於一點，則這兩條數線所形成的平面稱為**直角坐標平面**，如下圖所示。



其中水平的數線稱為橫軸或 x 軸，鉛垂的數線稱為縱軸或 y 軸，而 x 軸與 y 軸的交點稱為坐標的原點，通常以 O 點表示。直角坐標以 O 點為中心，x 軸向右為正，向左為負；y 軸向上為正，向下為負。

設 p 點為坐標平面上任一點，由 p 點對 x 軸、y 軸分別作垂直線，在 x 軸與 y 軸上所對應的數分別為 a 與 b，則我們說 p 點的坐標為 (a,b)，記為 $p(a,b)$，其中 a 為 p 點的橫坐標（即 x 坐標），b 為 p 點的縱坐標（即 y 坐標），如下圖所示。相反的，若任意給一組數對 (a,b)，我們可

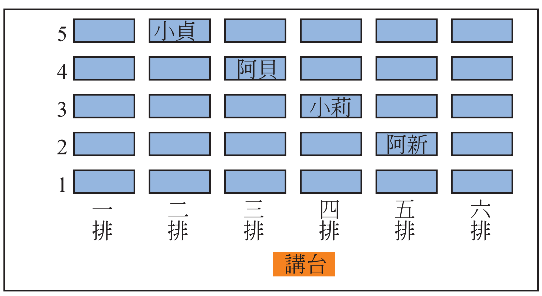
以分別在 x 軸與 y 軸上，找出與 a、b 對應的點 A、B，再由 A、B 分別作垂直線，則此兩直垂線交點 p 的坐標即為 (a,b)，如下圖所示。



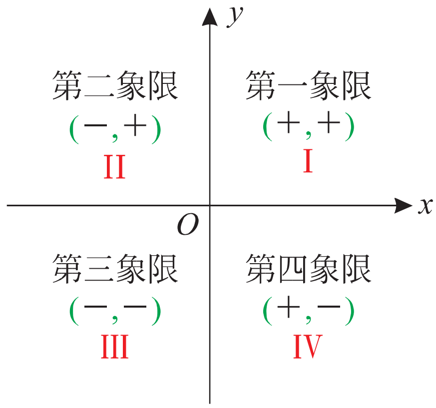
綜合上述內容，我們可以很清楚的知道，平面上的任一點，都可以用一組數對來表示。反之，對於任何一組數對也可以表示坐標平面上的一點，像這樣的坐標平面，我們統稱**直角坐標平面系**或簡稱為**平面坐標系**；直角坐標平面系又稱為笛卡兒坐標系。

註：笛卡兒（*Rene Descartes*，1596～1650）創建解析幾何，首先用一組數對來表示平面上的點，世人為了紀念他對數學的貢獻，將直角坐標平面系又稱為笛卡兒坐標系。

直角坐標在日常生活的應用上頗為普遍，例如下圖中，在上課教室裡，若採用(排,列)來表示座位，則我們可以用數對來表示阿新的座位為$(5,2)$，小莉的座位為$(4,3)$，阿貝的座位為$(3,4)$，小貞的座位為$(2,5)$。



坐標平面上的 x 軸與 y 軸將坐標平面分成四個區域，依逆時針方向依序稱之爲第一象限、第二象限、第三象限、第四象限，而 x 軸與 y 軸上的點不屬於任何象限。如下圖所示。



由上圖可以得知：

在第一象限內，點坐標的正負性質必爲 $(+,+)$

在第二象限內，點坐標的正負性質必爲 $(-,+)$

在第三象限內，點坐標的正負性質必爲 $(-,-)$

在第四象限內，點坐標的正負性質必爲 $(+,-)$

在 x 軸上的點，每一個點坐標都可以表示爲 $(x,0)$，即 y 坐標爲 0。

在 y 軸上的點，每一個點坐標都可以表示爲 $(0,y)$，即 x 坐標爲 0。

那麼原點的坐標爲 $(0,0)$。

演示 6

請問下列各點分別在那一象限內或坐標軸上？將正確答案填入空格內。

點坐標	$A(1,2)$	$B(2,-7)$	$C(-32,5)$
坐標的正負符號			
象限或軸			

點坐標	$D(-6,-4)$	$E(-10,0)$	$F(0,17\frac{1}{5})$
坐標的正負符號			
象限或軸			

解：

點坐標	$A(1,2)$	$B(2,-7)$	$C(-32,5)$
坐標的正負符號	$(+,+)$	$(+,-)$	$(-,+)$
象限或軸	一	四	二

點坐標	$D(-6,-4)$	$E(-10,0)$	$F(0,17\frac{1}{5})$
坐標的正負符號	$(-,-)$	$(-,0)$	$(0,+)$
象限或軸	三	x 軸	y 軸

自我練習 6

下表中各點分別在那一象限內或那一坐標軸上？將答案分別填入空格內。

點座標	$A(3\frac{2}{5},-4)$	$B(-\frac{3}{2},-\frac{7}{3})$	$C(0,-\frac{3}{5})$
象限或坐標軸			
點座標	$D(-7,\frac{1}{4})$	$E(1\frac{1}{4},0)$	$F(101,388)$
象限或坐標軸			

演示 7

若$a<0$，$b>0$，則下列各點的坐標分別在那一個象限？將答案分別填入空格內。

點	(a,b^2)	$(a^2,-b)$
象限		
點	$(ab,-a)$	$(-a^2,-b^2)$
象限		

解：$a<0$，$b>0 \Rightarrow a<0$，$b^2>0$ 因此點 (a,b^2) 爲 $(-,+)$ 位於第二象限
$a<0$，$b>0 \Rightarrow a^2>0$，$-b<0$ 因此點 $(a^2,-b)$爲$(+,-)$ 位於第四象限
$a<0$，$b>0 \Rightarrow ab<0$，$-a>0$ 因此點$(ab,-a)$爲$(-,+)$ 位於第二象限
$a<0$，$b>0 \Rightarrow -a^2<0$，$-b^2<0$ 因此點 $(-a^2,-b^2)$爲$(-,-)$位於第三象限

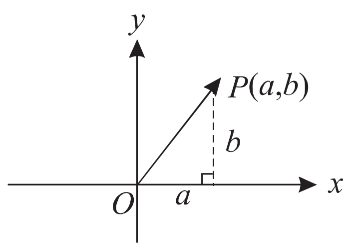
自我練習 7

如果$p(a,b)$在直角坐標平面上的第二象限內，試寫出下表中各點在那一個象限內或坐標軸上。

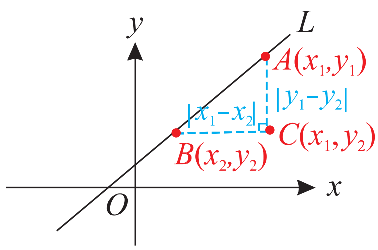
坐標	$(a,-b)$	$(0,b)$	$(a-b,b)$
象限或坐標軸			
坐標	$(-a,b)$	$(-a,0)$	$(-a,-b)$
象限或坐標軸			

二、直角坐標上兩點的距離

如下圖，若直角坐標上有一點 P，其坐標爲 (a,b)，則由圖中可知 P 點到 x 軸的距離爲 $|b|$，P 點到 y 軸的距離爲 $|a|$。因此我們可以知道一個點到 x 軸的距離與 y 坐標相關，到 y 軸的距離與 x 坐標相關，根據勾股定理（畢氏定理），則 $\overline{OP}=\sqrt{a^2+b^2}$。



同理，若直角坐標上有 A、B 二點，其坐標分別爲 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，則由下圖中可以看出 C 點的坐標爲 (x_1,y_2)，故 $\overline{AC}=|y_1-y_2|$，$\overline{BC}=|x_1-x_2|$，根據勾股定理（畢氏定理），則 $\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$。



演示 8

直角坐標上，若 A 點位於第三象限，且 A 點到 x 軸的距離爲 3，到 y 軸的距離爲 4，則 (1) A 點的坐標爲何？　(2)原點爲 O，則 $\overline{OA}=$？

解：(1) A 點位於第三象限，且 A 點到 x 軸的距離爲3 $\Rightarrow$ A點的y 坐標爲 -3

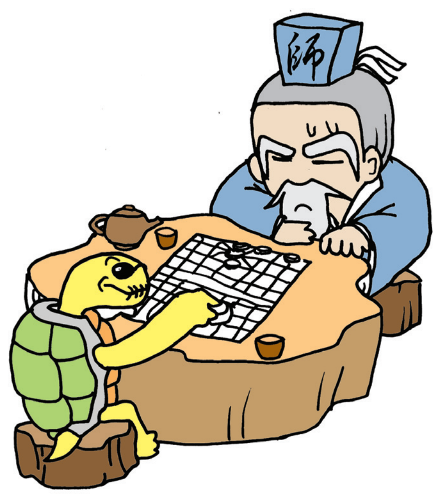
A 點位於第三象限，且 A 點到 y 軸的距離爲4 $\Rightarrow$ A點的 x 坐標爲 -4

故 A 點坐標爲 $(-4,-3)$

(2) $\overline{OA}=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=5$

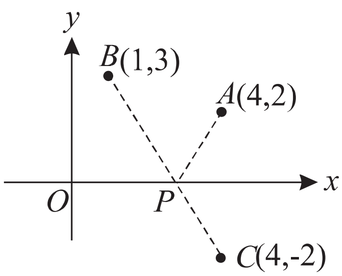
自我練習 8

請寫出直角坐標平面上，與 x 軸距離爲 6 個單位長，與 y 軸距離爲 8 個單位長的所有點的坐標；這些點和原點的距離爲何？



演示 9

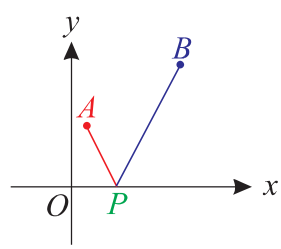
長方形撞球檯，若球檯相鄰兩邊恰為 x 軸與 y 軸，如下圖，母球位於 $A(4,2)$，九號球位於 $B(1,3)$，撞球小子楊順將母球向球檯邊上 P 點打出，想要以一顆星撞上九號球，並將九號球撞入球袋內結束比賽，若要求出 P 點坐標則可以利用 A 點對稱點與反射原理，試問 A 點對 x 軸的對稱點若為 $C(4,-2)$，則 $\overline{BC}=$？



解：$\overline{BC}=\sqrt{(4-1)^2+(-2-3)^2}=\sqrt{3^2+(-5)^2}=\sqrt{9+25}=\sqrt{34}$

自我練習 9

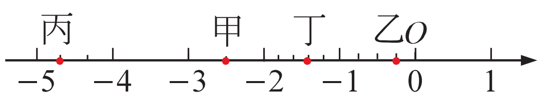
阿九玩撞球，球從 $A(1,4)$ 打出去，碰到球檯邊 P 點，反彈後恰好撞到 B 點，已知 $P(3,0)$，$B(7,8)$，如下圖，試求 $\overline{AB}=$？$\overline{PB}=$？



3-1 自我挑戰

(　　)1. 甲第一天向東走了 1 公里，第二天轉向西走 2 公里，第三天又向東走 3 公里如此每天都以反方向比前一天多走 1 公里的路程，一共走了 7 天，則下列敘述何者正確？ (A)他最後位置在原出發點的東方 28 公里處 (B)他最後位置在原出發點的東方 4 公里處 (C)他一共走了 56 公里 (D)他一共走了 4 公里。

(　　)2. 如下圖，數線上有甲、乙、丙、丁四點，試問關於這四點的位置描述何者錯誤？ (A)甲(-2.5) (B)乙$(-\frac{1}{4})$ (C)丙$(-5\frac{1}{3})$ (D)丁$(-1\frac{2}{5})$



(　　)3. 數線上與$-2\frac{3}{4}$ 最接近的整數是多少？

(A)-2 (B)-3 (C) 2 (D) 3

(　　)4. 設甲數爲整數，且$-\frac{27}{4}<$甲數$<2\frac{1}{3}$，則適合甲數的所有整數共有多少？個？ (A) 8 個 (B) 9 個 (C) 10 個 (D) 11 個。

(　　)5. 在數線上有四點A、B、C、D，已知A 在 B的左邊，C 在 B的右邊，D 在 A的左邊，則A、B、C、D四點所表示的數何者最大？ (A) A (B) B (C) C (D) D 。

(　　)6. 假若(a,b)在第二象限，(c,d)在第三象限，則 (ac,bd)在？

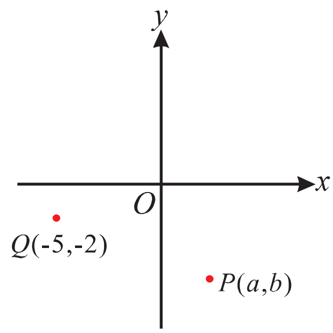
(A)第一象限 (B) 第二象限 (C)第三象限 (D)第四象限。

(　　)7. 若(a,b)為在第三象限的一點，則點(a^3,b^3)在第幾象限？

(A)第一象限　(B)第二象限　(C)第三象限　(D)第四象限。

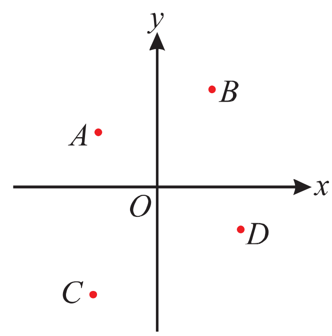
(　　)8. 如下圖，直角坐標平面上有一點$p(a,b)$，若p向上垂直移動7個單位，向左平移8個單位，最後向下垂直移動3個單位到達$Q(-5,-2)$，則p點坐標$(a,b)=$？

(A) $(2,-3)$　(B) $(2,-4)$　(C) $(3,-6)$　(D) $(3,-7)$



(　　)9. 如下圖，直角坐標平面上有A、B、C、D四個點，請問下列那一個點的坐標最正確？

(A) $A(-2,-3)$　(B) $B(4,-5)$　(C) $C(-3,4)$　(D) $D(5,-2)$



(　　)10. 若自直角坐標平面$(-2,7)$出發，每次均向左1單位，向下2單位移動。若這樣的走法重複6次，則最後位置的坐標為何？

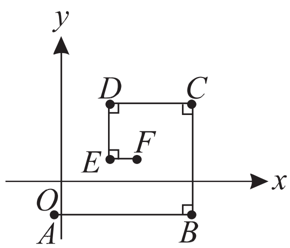
(A) $(-8,1)$　(B) $(-8,-5)$　(C) $(4,-5)$　(D) $D(4,1)$。

11. 坐標平面上有一點 $A(-2,3)$，若有一人向北走 4 個單位長，再向西移動 6 個單位長到達 B 點，試問 $\overline{AB}$=________。

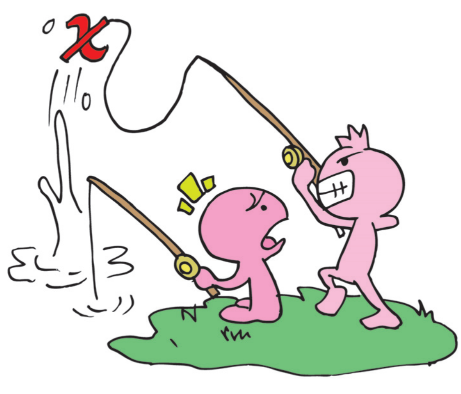
12. 若 $|a|<5\frac{1}{3}$，且 a 爲整數，則滿足此條件的 a 共有 ________個。

13. 若 $|k|>\frac{7}{5}$，請問滿足條件中 k 的最小正整數爲________。

14. 小華從附圖的 A 點出發，沿 A、B、C、D、E、F 路線行走。已知 B 點的坐標爲 $(9,-2)$，且 $\overline{AB}=10$，$\overline{BC}=8$，$\overline{CD}=6$，$\overline{DE}=4$，$\overline{EF}=2$，則 $\overline{AF}$=________。



15. 一數線上有 A、B、C、D 四點，分別表示 $-\frac{3}{2}$、$\frac{3}{4}$、$-\frac{4}{5}$、$\frac{6}{5}$，則這四點中最靠近原點的是 ________點。



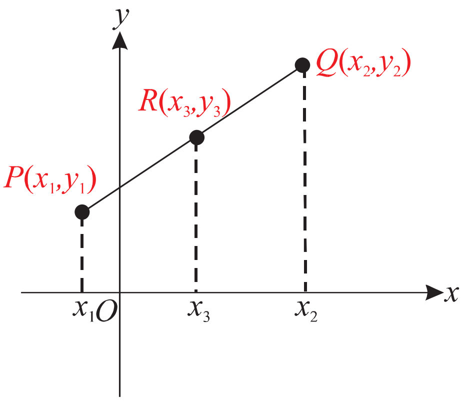
3 － 2 直線方程式

3 － 2.1 直線的斜率

假設我們將直線L視爲一個斜坡，則我們可以用水平方向每前進一單位距離時，鉛直方向隨之上升或下降多少個單位距離的比值(m)來表示直線L的傾斜度。如下圖所示，假設由點$P(x_1,y_1)$ 走到$Q(x_2,y_2)$ ，則 x_2-x_1 表示由 P 到 Q 的水平位移，y_2-y_1表示由 P 到 Q 的鉛直位移。若 $x_2\neq x_1$，則我們可以藉由比值：

$$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

的大小來表示直線 L 的傾斜程度。



若我們在直線 L 上任取一點 $R(x_3,y_3)$，則我們由相似形的原理可以得：

$$m=\frac{(y_2-y_1)}{(x_2-x_1)}=\frac{(y_3-y_1)}{(x_3-x_1)}=\frac{(y_3-y_2)}{(x_3-x_2)}$$

由此可以知道，只要是同一條直線上的任意兩點所求得的比值 m 都是一樣的，即比值m不會因爲所取的點不同而改變。所以只要不是鉛直線（垂直 x 軸的直線），一定可以找到該直線的比值，我們稱這個比值 m 爲直線的斜率。同時，若直線 $\overline{PQ}$ 爲鉛直線，即 $x_2-x_1=0$時，我們不規定它的斜率，或者說它的斜率不存在。

演示 1

試求下列各題中，兩點所形成的直線斜率。

⑴ $A(2,6)$、$B(-1,3)$

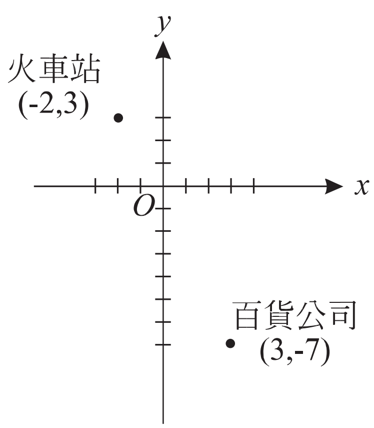
⑵ $P(-2,3)$、$Q(3,-5)$

解：⑴ A、B 兩點所形成的直線斜率 $m=\dfrac{3-6}{-1-2}=\dfrac{-3}{-3}=1$

⑵ P、Q 兩點所形成的直線斜率 $m=\dfrac{-5-3}{3-(-2)}=\dfrac{(-8)}{5}=-\dfrac{8}{5}$

自我練習 1

如下圖，若公車的行駛路線為一直線，且此直線可同時經過火車站和百貨公司，則公車行駛路線的斜率為何？



由以上認知直線斜率的意義為表示其傾斜的程度，所以可以合理的推論落在同一直線上的三個點，任兩點所決定的線段，其斜率會相等。亦可推論兩平行的線段，其傾斜的程度一致，當然其斜率也會相等。

演示 2

若 $A(0,3)$、$B(-6,5)$、$C(k,2)$ 三點共線，則 $k=$？

解：因爲 A、B、C 三點共線，所以任意兩點斜率應相等

$$\Rightarrow \frac{5-3}{-6-0}=\frac{2-3}{k-0}$$

$$\Rightarrow \frac{2}{-6}=\frac{-1}{k}$$

$$\Rightarrow k=3$$

自我練習 2

若亞瓜拉颱風，上午 9 點時的颱風中心在地圖上的位置是 $(-3,2)$，上午 12 點時中心在地圖上的位置是 $(1,4)$。若颱風行進方向不變且直線行進，而某城市的位置 $(k+1,6)$ 恰好位於颱風的行進路徑上，則 k 的值是多少？

我們亦可藉由兩直線的斜率關係，來判別兩直線是否平行或垂直，因爲其證明需經由其斜角透過三角函數等運算，過於複雜，故證明過程在此省略。（平行的符號爲「//」，垂直的符號爲「⊥」）。

設兩相異的直線 L_1 與 L_2 的斜率分別爲 m_1 與 m_2，則

(1)若 $L_1//L_2$，則 $m_1=m_2$（反之，若 $m_1=m_2$，則 $L_1//L_2$）。

(2)若 $L_1\perp L_2$，則 $m_1\cdot m_2=-1$（反之，若 $m_1\cdot m_2=-1$，則 $L_1\perp L_2$）。

演示 3

設 $A(2,k)$、$B(k+1,3)$、$C(-1,1)$、$D(3,-2)$，請回答下列問題。

⑴ 若$\overline{AB}//\overline{CD}$，試求 k 值。

⑵ 若$\overline{AB}\perp\overline{CD}$，試求 k 值。

解：$\overline{AB}$ 的斜率為 $\dfrac{3-k}{(k+1-2)}=\dfrac{3-k}{k-1}$，$\overline{CD}$的斜率為 $\dfrac{-2-1}{3-(-1)}=\dfrac{-3}{4}$

⑴若$\overline{AB}//\overline{CD}$，則斜率相等$\Rightarrow\dfrac{3-k}{k-1}=\dfrac{-3}{4}$

$\Rightarrow 12-4k=-3k+3\Rightarrow k=9$

⑵若$\overline{AB}\perp\overline{CD}$，則斜率乘積等於$-1$

$\Rightarrow\dfrac{3-k}{k-1}\times\left(\dfrac{-3}{4}\right)=-1$

$\Rightarrow\dfrac{3-k}{k-1}=\dfrac{4}{3}\Rightarrow 9-3k=4k-4$

$\Rightarrow 7k=13\Rightarrow k=\dfrac{13}{7}$

自我練習 3

設 $A(0,7)$、$B(a,-1)$、$C(-7,3)$、$D(-2,5)$，請回答下列問題。

⑴若 $\overline{AB}//\overline{CD}$，試求 a 值。

⑵若 $\overline{AB}\perp\overline{CD}$，試求 a 值。

3－2.2 直線方程式

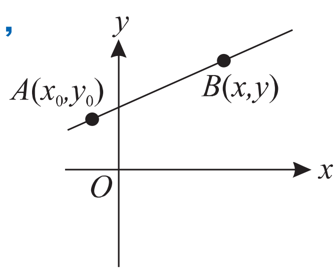
在一平面上，相同斜率的直線將有無限多條，如果選擇通過一固定點的直線，則僅有一條。又同一條直線的斜率都相等，因此，我們要求通過固定點的直線方程式，就容易多了。

現在用直尺及筆畫一直線，假設筆尖看做點，筆之移動就是點的移動，這些移動的點以(x,y)表示，又此直線的固定點爲$A(x_0,y_0)$，則$\dfrac{y-y_0}{x-x_0}$爲這直線的斜率，如果我們事先知道這直線的斜率爲 m。因同一直線斜率都相等，所以

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0}$$

再將上式整理得$y-y_0=m(x-x_0)$，就是這條直線的方程式了。

即：坐標平面上，直線 L 經過點 $A(x_0,y_0)$且斜率為 m，
則直線 L 的方程式為 $y-y_0=m(x-x_0)$。
一般又稱此直線方程式為點斜式。



演示 4

在直角坐標平面上，已知直線 L 的斜率爲 3，且通過點 $p(3,1)$，則 L 的直線方程式爲何？

解：由點斜式$y-y_0=m(x-x_0)$

$\Rightarrow y-1=3(x-3)$

$\Rightarrow y-1=3x-9$

$\Rightarrow 3x-y-8=0$

自我練習 4

在直角坐標平面上，已知直線 L 的斜率為$\frac{2}{3}$，且通過點 $k(2,-1)$ ，則 L 的直線方程式為何？

演示 5

在直角坐標平面上，一直線經過點$(2,-1)$和$(3,-2)$，試求此直線方程式。

解：此直線的斜率為：$m=\frac{-1-(-2)}{2-3}=-1$

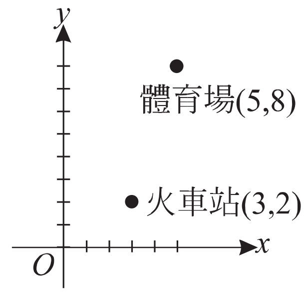
則其方程式為 $y+1=-1(x-2)$

$\Rightarrow y+1=-x+2$

$\Rightarrow x+y-1=0$

自我練習 5

火車站和體育場在坐標平面上的位置如下圖所示，計程車沿著八德大道直線行駛，同時經過火車站和體育場，求車行八德大道所代表的直線方程式。



在坐標平面上的直線必定會與坐標平面上的軸相交，此時這交點對該坐標軸之坐標，稱爲圖形在該坐標軸的截距。若一直線 L 爲:$k_1x+k_2y=k$，則直線 L 與 x 軸相交，令 $y=0$ 代入，得 $x=\dfrac{k}{k_1}$ ，此時這直線在 x 軸的截距爲$\dfrac{k}{k_1}$，即直線 L 與 x 軸的交點坐標爲$(\dfrac{k}{k_1},0)$。 又若直線 L 與 y 軸相交，令 $x=0$ 代入，得 $y=\dfrac{k}{k_2}$，此時這直線在 y 軸的截距爲 $\dfrac{k}{k_2}$，即直線 L 與 y 軸的交點坐標爲$(0,\dfrac{k}{k_2})$。令$\dfrac{k}{k_1}=a$ ，$\dfrac{k}{k_2}=b$，則可獲得以下結論：

⑴若一直線在 x 軸的截距爲 a，表示此直線與 x 軸的交點爲 $(a,0)$；反之，若直線與 x 軸的交點爲 $(a,0)$，則此直線在 x 軸的截距爲 a。

⑵若一直線在 y 軸的截距爲 b，表示此直線與 y 軸的交點爲 $(0,b)$；反之，若直線與 y 軸的交點爲 $(0,b)$，則此直線在 y 軸的截距爲 b。

演示 6

在直角坐標平面上，若直線 L 的 y 軸截距爲 3，且通過點 $(-1,2)$，則直線 L 的方程式爲何？

解：因直線 L 的 y 軸截距爲 3，則直線 L 通過點$(0,3)$

又點 $(-1,2)$ 在直線 L 上，直線 L 的斜率爲 $m=\dfrac{2-3}{-1-0}=1$

所以直線 L 的方程式爲 $y-2=1(x+1)$

$\Rightarrow y-2=x+1$

$\Rightarrow x-y+3=0$

自我練習 6

在直角坐標平面上，直線 $ax+y+k=0$ 的斜率為$\frac{1}{3}$，y軸截距為 2， 試求

(1) $a=$？　(2) $k=$？

演示 7

在直角坐標平面上，已知直線的 x 軸截距為 -2，y 軸截距為 3，則此直線方程式為何？

解: 此直線和 x 軸與 y 軸分別相交於 $(-2,0)$與$(0,3)$

$\Rightarrow$此直線的斜率為 $m=\dfrac{0-3}{-2-0}=\dfrac{3}{2}$

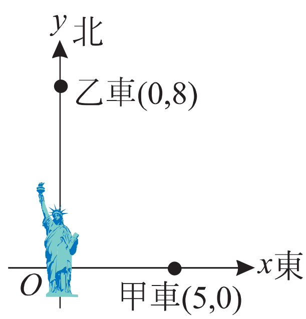
$\Rightarrow$此直線方程式為 $y-0=\dfrac{3}{2}(x+2)$

$\Rightarrow 2y=3x+6$

$\Rightarrow 3x-2y+6=0$

自我練習 7

如下圖，一條東西向道路與一條南北向道路的交會處有一座自由女神雕像，甲車位於雕像東方 5 公里處，乙車位於雕像北方 8 公里處，若以雕像當作原點，則甲、乙兩車連線所形成的直線方程式為何？



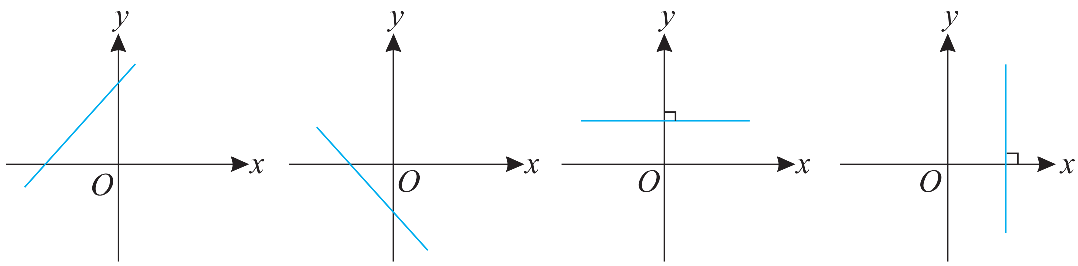
前面已討論了已知斜率求直線方程式，那已知直線方程式可以求其斜率嗎？答案當然是肯定的。設直線方程式爲 $ax+by+c=0$，若我們分別令 $x=0$、 $y=0$，可得此直線與 x 軸的交點爲 $(-\frac{c}{a},0)$，與 y 軸的交點爲 $(0,-\frac{c}{b})$，則此直線的斜率爲

$$m=\frac{-\frac{c}{b}-0}{0-(-\frac{c}{a})}=\frac{-\frac{c}{b}}{\frac{c}{a}}=-\frac{a}{b}$$

即：**若直線方程式為 $ax+by+c=0$，則此直線的斜率為 $m=-\frac{a}{b}$** 。

由上可知直線方程式一經確定，我們便可以找出直線的斜率，並且可以判別斜率的大小。更可由斜率的大小，知道直線在坐標上的傾斜狀況。

若一直線由左下方往右上方上升時，其**斜率為正**。若一直線由右下方往左上方上升時，其**斜率為負**。若直線方程式爲 $ax+by+c=0$ 的 $a=0$，則**斜率為 0**（即此直線平行 x 軸）。若直線方程式爲 $ax+by+c=0$ 的 $b=0$，則**斜率不存在**（即此直線垂直 x 軸）



斜率爲正　　斜率爲負　　斜率爲 0　　斜率不存在

演示 8

求下列直線方程式的斜率各為多少？

(1) $2x+3y+1=0$

(2) $3x-2y-8=0$

(3) $3x+1=0$

(4) $5y+2=0$

解：(1) $2x+3y+1=0 \Rightarrow m=-\dfrac{2}{3}$

(2) $3x-2y-8=0 \Rightarrow m=-\dfrac{3}{-2}=\dfrac{3}{2}$

(3) $3x+1=0 \Rightarrow m$ 不存在

(4) $5y+2=0 \Rightarrow m=0$

自我練習 8

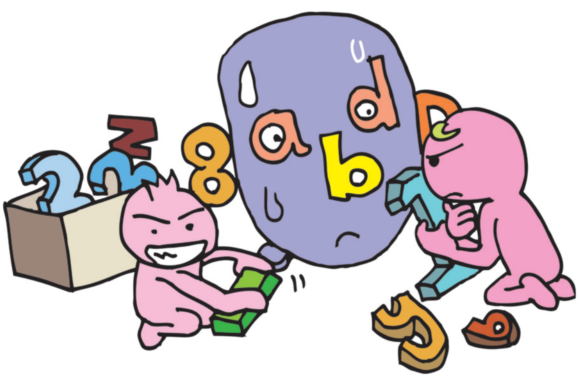
求下列直線方程式的斜率各為多少？

(1) $2x+8y-3=0$

(2) $3y-4x+1=0$

(3) $x=-3$

(4) $3y-5=0$



3-2 自我挑戰

1. 寫出下列各條件下的直線方程式

(1)設直線斜率為 -2，且 x 截距為 -3 之直線方程式為__________

(2)設直線斜率為 -2，且 y 截距為 -3 之直線方程式為__________

(3)過點 $(4,3)$ 且斜率為 2 的直線方程式為__________

(4) x 截距為 3，y 截距為 -2 的直線方程式為__________

(5)設直線通過 $A(1,5)$、$B(-2,8)$ 兩點，則其直線方程式為__________。

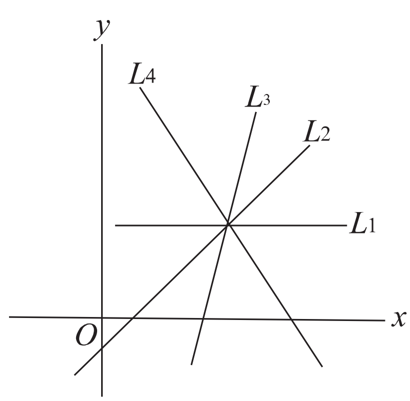
2. 直線 $6x-5y=30$ 的 x 軸截距為__________，y 軸截距為__________。

3. 直線通過 $A(6,5)$、$B(k+1,3)$ 兩點，且直線斜率為 $-\frac{1}{3}$，則 k 的值是__________。

4. 平面上有 $A(3,1)$、$B(9,k+1)$、$C(1,4)$、$D(k,5)$ 四點，已知 $\overline{AC}//\overline{BD}$，則 k 值為__________。

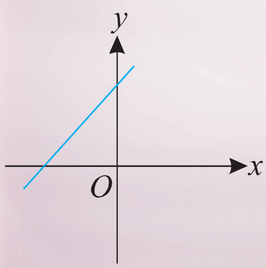
5. 直線 $L:3y+6x-1=0$ 的斜率為__________。

6. 在直角坐標系中有四條直線 L_1、L_2、L_3、L_4，其斜率分別為 m_1、m_2、m_3、m_4，由大到小排列__________。

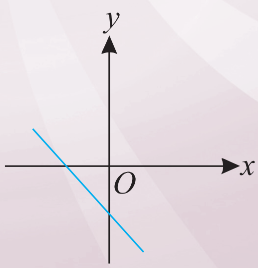


本單元重點整理

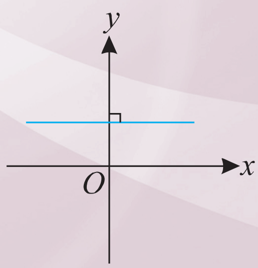
1. 數線上兩個點 $P(a)$、$Q(b)$ 之間的距離 $\overline{PQ}$，則 $\overline{PQ}$ 以 $|a-b|$ 或 $|b-a|$ 表示。
2. 若直角坐標上有一點 P，其坐標為 (a,b)、原點為 O，則 $\overline{OP}=\sqrt{a^2+b^2}$。
3. 若直角坐標上有 A、B 二點，其坐標分別為 $A(x_1,y_1)$、$B(x_2,y_2)$，則 $\overline{AB}=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$。
4. 若 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$，則通過 P、Q 兩點的直線斜率為 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$。
5. 兩相異直線 L_1 與 L_2 的斜率分別為 m_1 與 m_2，則
   (1) 若 $L_1 // L_2$，則 $m_1=m_2$。
   (2) 若 $L_1 \perp L_2$，則 $m_1 \times m_2=-1$。
6. 若直線方程式為 $ax+by+c=0$，則此直線的斜率為 $m=-\dfrac{a}{b}$。
7. 若一直線由左下方往右上方上升時，其**斜率為正**。若一直線由右下方往左上方上升時，其**斜率為負**。若直線方程式為 $ax+by+c=0$ 的 $a=0$，則**斜率為 0**（即此直線平行 x 軸）。若直線方程式為 $ax+by+c=0$ 的 $b=0$，則**斜率不存在**（即此直線垂直 x 軸）。



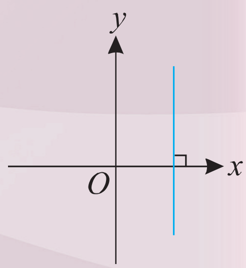
斜率為正



斜率為負



斜率為 0



斜率不存在

8. 坐標平面上，直線 L 經過點 $A(x_0,y_0)$ 且斜率為 m，則直線 L 的方程式為 $y-y_0=m(x-x_0)$。

notes

心得筆記欄

單元 4

數列與級數

4 − 1　等差數列與等差級數

4 − 1.1 數列與級數的意義

4 − 1.2 等差數列

4 − 1.3 等差中項

4 − 1.4 等差級數

4 − 2　等比數列與等比級數

4 − 2.1 等比數列

4 − 2.2 等比中項

4 − 2.3 等比級數

4 − 2.4 等比級數的應用：複利的計算

單元四　數列與級數

許多人都希望能夠有機會到處走走，尤其是到國外旅行，但對於小資族而言，有時因受限經濟因素，或是沒有良好的存錢習慣而導致無法如願以償。最近幾年有人在網路上分享了一些很特別的存錢方式，也有人稱之爲「階梯式存錢法」。例如：每個禮拜多存 10 元的存錢法，也就是第一週存 10 塊錢，第二週存 20 元…第 10 週存 100 元，以這樣的規律存錢 52 週(也就是一整年)下來，究竟會發生甚麼神奇的事呢?

52 週存錢挑戰表

週	存入	帳戶累計	完成	週	存入	帳戶累計	完成
1	10	10	□	27	270	3780	□
2	20	30	□	28	280	4060	□
3	30	60	□	29	290	4350	□
4	40	100	□	30	300	.	□
5	50	150	□	31	310	.	□
6	60	210	□	32	320	.	□
7	70	280	□	33	330	.	□
8	80	360	□	34	340	.	□
9	90	450	□	35	350	.	□
10	100	550	□	36	360	.	□
11	110	660	□	37	370	.	□
12	120	780	□	38	380	.	□
13	130	910	□	39	390	.	□
14	140	1050	□	40	400	.	□
15	150	1200	□	41	410	.	□
16	160	1360	□	42	420	.	□
17	170	1530	□	43	430	.	□
18	180	1710	□	44	440	.	□
19	190	1900	□	45	450	.	□
20	200	2100	□	46	460	.	□
21	210	2310	□	47	470	.	□
22	220	2530	□	48	480	.	□
23	230	2760	□	49	490	.	□
24	240	3000	□	50	500	.	□
25	250	3250	□	51	510	.	□
26	260	3510	□	52	520	?	□

如果按照上列 52 週存錢挑戰表確實執行後，52 週(也就是一年)的時間，總共可以存下 13,780 元，相信對於嚮往出國旅遊的人可以貢獻不少旅遊基金。將每週存款 10、20、30…排成一列，這就是數列。

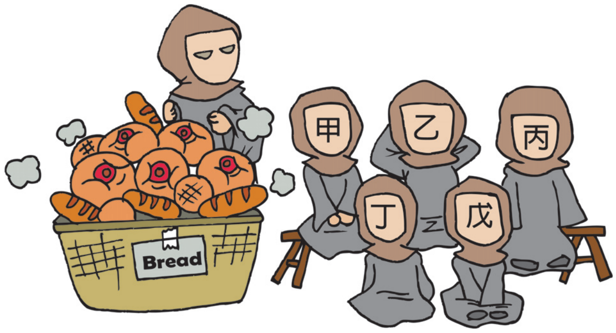
本單元將介紹等差數列與等差級數、等比數列與等比級數，討論數字之間的規則性及其相互的關係，並從數列的規則中學習求其總和及相關的應用。

4－1 等差數列與等差級數

▲萊因德紙草書

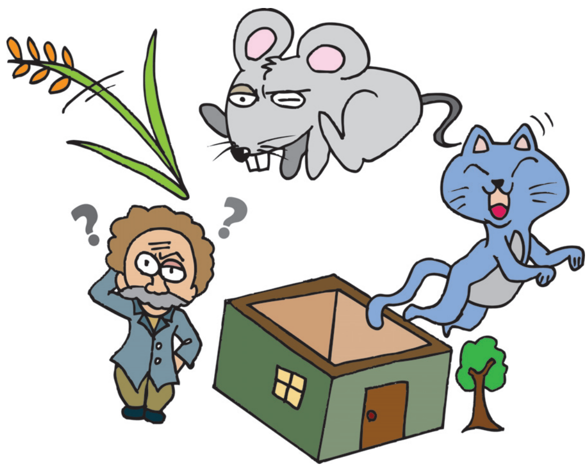
英國學者亨利．萊因德（*Henry Rhind*）在底比斯廢墟中發現《萊因德紙草書》(*Rhind Papyrus*)，此書約西元前 1650 年左右的著作，由當時僧侶阿默斯（*Ahmes*）依據更早年代的知識所寫，可見埃及很早以前就開始研究數學。紙草書內容分兩部分，前面是一個分數表，後面是 84 個數學問題和一段無法理解的話（也稱爲問題 85），其中的第 40 題和第 79 題分別爲：

（第 40 題）：把 100 個麵包分給 5 個人，使每人所得成等差數列，且使最大的三份之和的$\frac{1}{7}$是最小的兩份之和，問各得多少？



（第 79 題）：一個人，他的財產包括七個房間，每個房間飼養七隻貓，每隻貓捕捉七隻老鼠，每隻老鼠吃七串麥穗，每串麥穗能生產七赫克特（古埃及的容量單位）的麥。請問在這份財產中，房子、貓、老鼠、麥穗和穀物總共有多少？

※第 40 題爲等差數列問題，第 79 題爲等比數列問題。



4 － 1.1 數列與級數的意義

下表是搭乘高鐵從台北站出發到其他各站的票價資訊：

	板橋	桃園	新竹	台中	嘉義	台南	左營
標準車廂	40 元	160 元	290 元	700 元	1080 元	1350 元	1490 元
商務車廂	260 元	440 元	640 元	1250 元	1820 元	2230 元	2440 元

(資料來源：108 年 5 月台灣高鐵網站)

從上面的表格中得知：
標準車廂票價：40，160，290，700，1080，1350，1490
商務車廂票價：260，440，640，1250，1820，2230，2440
(單位：元)

將票價依序列出來，這就形成一個**數列**。數列中第一個數稱第一項或首項，第二個數稱第二項，依此類推。

如果一個數列的項數是有限個，如上述兩種車廂票價所形成的數列，我們就稱這個數列爲**有限數列**，有限數列的最後一項又稱末項。如果項數是無限多個就稱爲**無窮數列（無限數列）**。

例如：將所有的正偶數依小到大排列：2，4，6，8，10，…爲無窮數列。

我們可以把數列表示成（n 表項數）

(1)有限數列：a_1、a_2、a_2、…、a_{n-1}、a_n

(2)無窮數列：a_1、a_2、a_2、…、a_{n-1}、a_n、…

一般而言，以符號〈a_n〉表示一個數列，其中 a_n 稱爲一般項（或稱通項）。

另外，也可以用〈b_n〉、〈c_n〉等符號來表示其他數列。

演示 1

某期大樂透開獎的號碼依序為 14，45，13，33，11，39，這些數字形成一個有限數列，請問此數列的項數、首項與末項分別為何？

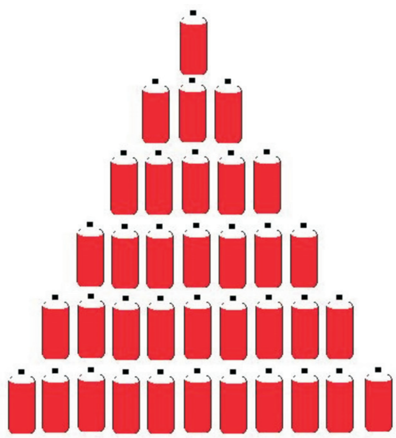
解：此數列項數為 6，

首項 a_1 為 14，

末項 a_6 為 39。

自我練習 1

大賣場裡汽水瓶有規律的排列如右下圖，由上而下放的的汽水瓶數目形成一個數列，依序是 1，3，5，7，…，請問此數列的首項與第 10 項的汽水瓶是多少個？



演示 2

設數列〈 a_n 〉的一般項爲 $a_n = 2n + 1$，請寫出該數列的前 5 項。

解：令 $n = 1$，2，3，4，5 分別代入可得前 5 項：

$a_1 = 2 \times 1 + 1 = 3$

$a_2 = 2 \times 2 + 1 = 5$

$a_3 = 2 \times 3 + 1 = 7$

$a_4 = 2 \times 4 + 1 = 9$

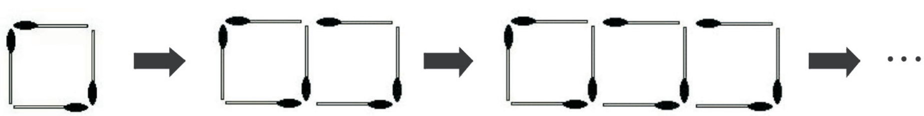
$a_5 = 2 \times 5 + 1 = 11$

自我練習 2

設數列〈 b_n 〉的一般項爲 $b_n = (\frac{2}{3})^n$，請寫出該數列的第 3 項和第 5 項。

演示 3

下圖中爲火柴棒依序排列所形成的圖形，請問當有 6 個正方形相連在一起時，需要多少根火柴棒？



解：設有 n 個正方形相連需要 a_n 個火柴棒，

觀察圖形可發現：$a_1 = 4$，$a_2 = 7$，$a_3 = 10$，…

因此推知 $a_n = a_{n-1} + 3$，

所以 $a_4 = a_3 + 3 = 10 + 3 = 13$，

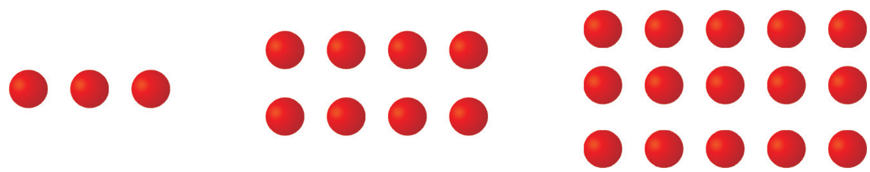
$a_5 = a_4 + 3 = 13 + 3 = 16$，

$a_6 = a_5 + 3 = 16 + 3 = 19$。

答：需要 19 根。

自我練習 3

下圖中紅球的數量會形成一個規律的數列，請找出此數列的第 8 項共有幾顆紅球。



將數列〈a_n〉中的每一項依序用「＋」號連接起來，所得的式子 $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$稱爲**級數**。

若〈a_n〉爲一個含有 n 項的有限數列，則 $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ 稱爲**有限級數**。

若〈a_n〉爲一個無窮數列，則$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$稱爲**無窮級數（無限級數）**。

例如：$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \cdots + 100$ 是一個有限級數，

$2 + 4 + 6 + 8 + \cdots + 100 + \cdots$是一個無窮級數。

4 － 1.2 等差數列

日常生活中常常可以看到等差數列的例子，例如同學的座號：1 號，2 號，3 號，4 號，5 號，⋯，40 號；棒球打擊練習場球道的球速：80 公里，90 公里，100 公里，110 公里，120 公里，130 公里，在這些數列中任意相鄰兩項的差（後一項減前一項）皆相等，我們稱這樣的數列爲等差數列。

班級	座號	學號	姓名
星光 1 班	1	61001	劉紅帽
星光 1 班	2	61002	陳小婷
星光 1 班	3	61003	簡小嫻
星光 1 班	4	61004	陳魔神
星光 1 班	5	61005	張老嘉
星光 1 班	6	61006	廖安波
星光 1 班	7	61007	郭舒服
星光 1 班	8	61008	朱阿霞
星光 1 班	9	61009	黃小妹
星光 1 班	10	61010	李胖達

▲班級名條表

等差數列 $\langle a_n \rangle$ 中任意相鄰兩項的差（後一項減前一項）稱爲公差。

即 $a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \cdots = a_n - a_{n-1} = d$（定值）

其各項之間的關係如下：

$$a_1 \xrightarrow{+d} a_2 \xrightarrow{+d} a_3 \xrightarrow{+d} a_4 \xrightarrow{+d} a_5 \xrightarrow{+d} \cdots \xrightarrow{+d} a_{n-1} \xrightarrow{+d} a_n$$

由上面的關係我們可以推導出等差數列的各項：

$$a_1 = a_1 + (1-1)d$$

$$a_2 = a_1 + d = a_1 + (2-1)d$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d = a_1 + (3-1)d$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d = a_1 + (4-1)d$$

$$a_5 = a_4 + d = a_1 + 4d = a_1 + (5-1)d$$

$$\vdots$$

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)d$$

其中 $a_n = a_1 + (n-1)d$ 稱爲等差數列的一般項。

● **公式：**

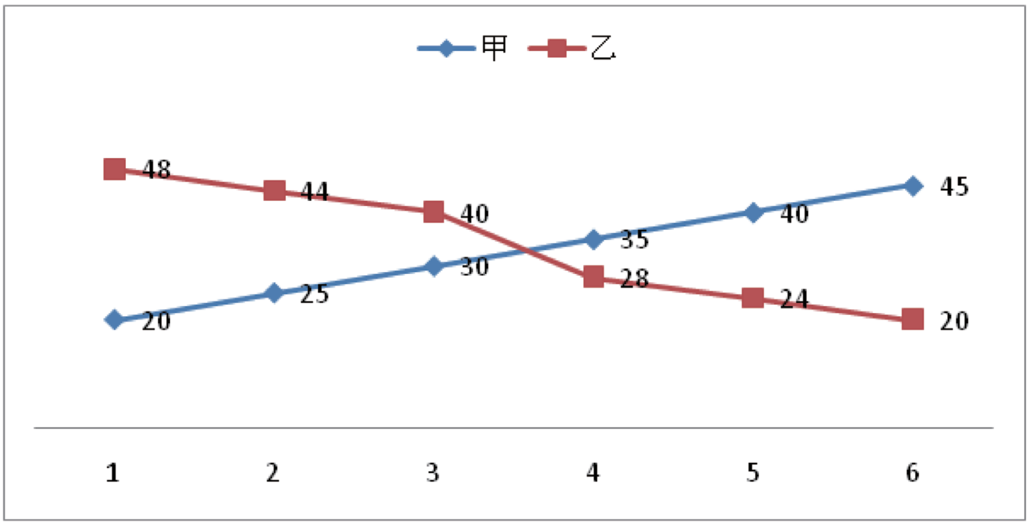
等差數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項爲 a_1，公差爲 d，則

(1) $a_n = a_1 + (n-1)d$

(2) $a_n = a_m + (n-m)d$

演示 4

某甲和某乙是保險業務員，下圖是兩人六個月內接洽人數的折線圖，請問兩人接洽的人數是否形成等差數列？如果是，請寫出公差。



解：(1)某甲：六個月的接洽人數爲：20，25，30，35，40，45。

因爲任意相鄰兩項的差（後一項減前一項）都是 5，所以是等差數列，公差爲 5。

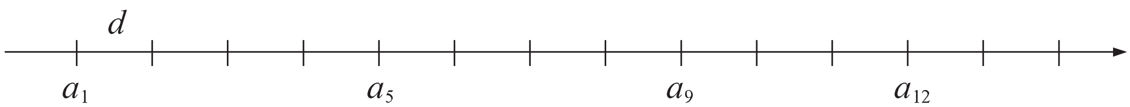
(2)某乙：六個月的接洽人數爲：48，44，40，28，24，20。

因爲 $40-44=-4$ 且 $28-40=-12$，

其中相鄰兩項的後項減前項的差不是定值，所以不是等差數列。

自我練習 4

將一個等差數列〈a_n〉在數線上標出其位置，已知其公差為 d ，請在下面的空格中填入適當的數。



(1) $a_5 = a_1 +$ ______ d

(2) $a_9 = a_5 +$ _____ d

(3) $a_{12} = a_9 +$ _____ d

演示 5

已知一個等差數列〈a_n〉的首項為 -2，公差為 3：

(1)求此等差數列的第 10 項。　(2) 43 是不是此等差數列的一項？

解 (1)已知 $a_1=-2$，$d=3$，

所以 $a_{10} = a_1 + (10-1)d = -2 + 9\times 3 = -2 + 27 = 25$。

(2)假設 43 是第 n 項，即 $a_n = 43$。

因為 $a_n = a_1 + (n-1)d$，

即 $43 = -2 + (n-1)\times 3$

$\Rightarrow 43 = -2 + 3n - 3$

$\Rightarrow 43 = 3n - 5$

$\Rightarrow 48 = 3n$

得　$n = 16$

所以 43 為此等差數列的第 16 項。

答：(1) 第 10 項為 25，(2) 43 是第 16 項。

自我練習 5

魯夫將從高雄駕遊艇前往英國，此遊艇的最大航程爲每天 280 浬，如果他計畫第一天航行 100 浬，第二天航行 115 浬，…依此類推，每天增加 15 浬，請問他第幾天可達最大航程？

4 − 1.3 等差中項

若 a、b、c 三數成等差數列，則 b 稱爲 a 和 c 的等差中項。因爲 $b-a=c-b$，所以 $2b=a+c \Rightarrow b=\dfrac{a+c}{2}$

即：等差中項 ＝ （前項＋後項）÷ 2

如 92，95，98 三數中，因爲 $2\times 95=92+98$，即$95=\dfrac{92+98}{2}$，所以 95 爲 92 和 98 的等差中項。

演示 6

台灣的門牌號碼編排方式爲：東西行走時，北邊爲單號，南邊爲雙號。已知拉拉、皮皮、比比三位好朋友的家都在同一側。拉拉家的門牌爲 17 號，比比家的門牌爲 45 號，皮皮的家正好位於其他兩家的正中間，請問皮皮家的門牌爲幾號?

拉拉　　　　比比

解 因爲同一側的門牌號碼形成一等差數列，

所以爲皮皮家的門牌號碼爲 17 號和 45 號的等差中項，

即$\frac{17+45}{2}=31$ 號。

答：31 號。

自我練習 6

試求 8 和 22 的等差中項。

4 － 1.4 等差級數

中國古代南北朝時張丘建在《張丘建算經》提到以下這一個問題：「今有女子不善織布，逐日所織的布以同數遞減，初日織五尺，末一日織一尺，計織三十日，問共織幾何？」書中的解法是：「併初、末日織布數，半之，餘以乘織訖日數，即得」女子第一天可以織五尺，最後一天織一尺，共織了三十天的布，以學過梯形面積公式的觀念可知共織 $\frac{(5+1)\times 30}{2}=90$ 尺。由於女子每日所織的布數量以同樣的數遞減，所以三十天的織布數會形成一等差數列。而將三十天的織布數相加起來就形成一個等差級數了。

將等差數列〈a_n〉中的每一項依序用「＋」號連接起來：

$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 就稱爲等差級數。

我們常用 S_n表示等差級數的前 n 項總和，即$S_n=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

可以推導出等差數列〈a_n〉前 n 項總和 S_n 的公式：

$$
\begin{array}{rcccccccc}
 & S_n & = & a_1 & + & a_2 & +\cdots\cdots+ & a_{n-1} & + & a_n \\
+) & S_n & = & a_n & + & a_{n-1} & +\cdots\cdots+ & a_2 & + & a_1 \\
\hline
\end{array}
$$

$$2S_n = \underbrace{(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+\cdots\cdots+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1)}_{n\text{ 個}\rightarrow[2a_1+(n-1)d]}$$

因為 a_1，$a_2=a+d$，$\cdots$，$a_{n-1}=a_1+(n-2)d$，$a_n=a_1+(n-1)d$

所以 $a_1+a_n=2a_1+(n-1)d$，$\cdots$，$a_2+a_{n-1}=2a_1+(n-1)d$，

$(a_1+a_n)=(a_2+a_{n-1})=\cdots=(a_n+a_1)=2a_1+(n-1)d$

故 $2S_n=n\times[2a_1+(n-1)d]$ ← 即有 n 個 $2a_1+(n-1)d$ 相加

$S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$

又將 $a_n=a_1+(n-1)d$ 代入

得 $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$。

● 公式

等差級數求和：

(1)已知首項 a_1、末項 a_n 和項數 n，則前 項總和 $S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$

(2)已知首項 a_1、公差 d 和項數 n，則前 n 總和 $S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]$

演示 7

小P為了出國旅遊想要存錢，爸爸告訴小P一種存錢方式，每週多存 10 元，也就是第一週存 10 塊錢，第二週存 20 元⋯；請問小 P 一年後總共可以存多少錢？(一年以 52 週計算)

解：已知首項 $a_1=10$，公差 $d=20-10=10$，第 52 項 $a_{52}=520$

利用公式 $S_n=\dfrac{n}{2}(a_1+a_n)$ 可求得

$$S_n=\frac{52}{2}(10+520)=26\times 530=13780$$

答：總共存下 13780 元。

自我練習 7

侑侑大學畢業後想買一台摩托車當作上班的交通工具，所以他開始以每天增加 1 元的方式存錢，也就是第一天存 1 元，第二天存 2 元，……第 365 天存 365 元，請問一年下來，侑侑共可存下多少錢?

演示 8

下列表格為 *JJ* 騎單車特訓的計畫表：

天數	第一天	第二天	第三天	…	第 n 天
里程數	1 公里	6 公里	11 公里	…	46 公里

以等差數列的方式增加每天的里程數，則

(1) 第幾天里程數達 46 公里？

(2) 特訓期間一共騎了多少公里？

解：(1)已知首項 $a_1=1$，公差 $d=6-1=5$，第 n 項 $a_n=46$。

由 $a_n=a_1+(n-1)\times d$ 知

$46=1+(n-1)\times 5$

$46 = 1 + 5n - 5$

$46 + 5 - 1 = 5n$

$50 = 5n$

$n = 10$

所以JJ將進行至第10天達46公里。

(2)利用公式 $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$ 可求得

$S_n = \frac{10}{2}(1 + 46) = 5 \times 47 = 235$

所以共騎了235公里。

答：(1)第10天，(2)共騎了235公里。

自我練習 8

計算等差級數 $5 + 2 + (-1) + \cdots + (-52)$ 的項數及總和。

演示 9

大聯盟投手受傷後的復建行程如下：第一天練習傳接球的數量爲20球，休息一天，到第三天時變爲練習25球的練習量，依照這樣的規律，復健爲期15天，請問復健過程中他一共投了多少球？

天數	第1天	第3天	第5天	…	第15天
投球數	20	25	30	…	?

解：首項 $a_1 = 20$，每隔2天增加的投球量爲5球，所以公差 $d = 5$，

$15 = 1 + (n-1) \times 2$，所以項數 $n = 8$，

由公式 $S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d]$ 可求得

$S_8 = \frac{8}{2}[2 \times 20 + (8-1) \times 5] = 300$

所以他一共投了 300 球。

答：共投了 300 球。

自我練習 9

KK是著名的大胃王，在美國紐約的「國際吃熱狗大賽」數次連霸。KK 爲了備戰新的賽事，預計第一天吃 30 個熱狗，以後每天吃的數量都比前一天多 6 個，他將依此訓練 11 天，請問他 11 天內一共吃了多少個熱狗？

天數	第 1 天	第 2 天	第 3 天	…	第 11 天
熱狗數	30	36	42	…	?

4-1 自我挑戰

1. 甲、乙、丙同學列出三種數列如下，而且每一種數列皆隱含某種規律，請問 $A+B+C$ 的值。

   甲：1，1，2，3，5，8，13，A，34，55

   乙：65，58，51，B，37，30

   丙：1，4，9，16，C，36，49

2. 若 3， a，27，b 四數恰形成一等差數列，則 $a+b$ 爲多少？

3. 若一個等差數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項爲 15，第 5 項爲 -1，求此數列的公差。

4. 求 13 和 27 的等差中項。

5. 若一等差數列 $\langle a_n \rangle$ 的第 2 項爲 -5，第 8 項爲 7，試求：

   (1)公差。

   (2)設末項爲 25，求此數列的項數。

6. 設一等差級數的首項爲 9，末項爲 21，項數爲 5，求其總和。

7. 有一等差級數 $3+7+11+\cdots+39$，試求：

   (1) 39 是此級數中的第幾項。

   (2)求總和。

8. 設一等差級數的首項爲 79，末項爲 7，和爲 1075，試求：

   (1)項數。

   (2)公差。

4－2 等比數列與等比級數

4－2.1 等比數列

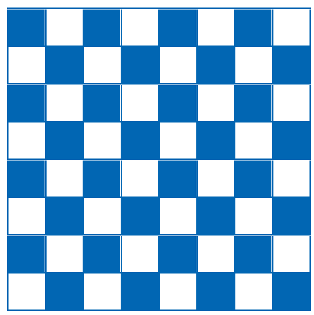
西洋棋是由一個數學家希薩（*Sissa*）發明的，那時印度國王很喜歡西洋棋，欣賞西洋棋的娛樂性。有一天國王召見希薩，國王就問「為了感謝你的發明，你要什麼？」。希薩就說他要米粒，並要求一個西洋棋盤，在西洋棋的第一格放1粒米，第二格放2粒米，第三格放4粒，第四格放8粒⋯，依此類推。當時，國王認為西洋棋只有64格小格，滿足希薩所需的米粒並不多，所以准許了他的請求。但是，宮廷的數學家花了好久的時間才計算出所需米粒的數目為$2^{64}-1=18446744073709551615$，就算把全世界所有的米粒賞給他也不夠。

國王在64格棋盤上付出的米粒數量分別為

$1、2、2^2、2^3、2^4、\cdots、2^{62}、2^{63}$。

將這個數列中任意相鄰兩項的商（後一項除以前一項）皆得到一個定值2，

$$\frac{2}{1}=\frac{2^2}{2}=\frac{2^3}{2^2}=\frac{2^4}{2^3}=\cdots=\frac{2^{63}}{2^{62}}=2$$



▲西洋棋棋盤

若數列$\langle a_n\rangle$中的每一項皆不為0，且任意相鄰兩項的商（後一項除以前一項）皆為定值，則稱數列$\langle a_n\rangle$為等比數列，定值r稱為公比。

即$\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_3}{a_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=r$

演示 1

請寫出下列等比數列的公比。

(1) 3，6，12，24，48，96

(2) 1000，-500，250，-125

解：(1)公比 $r=\dfrac{6}{3}=2$

(2)公比 $r=\dfrac{-500}{1000}=-\dfrac{1}{2}$

自我練習 1

請寫出下列等比數列的公比。

(1) 5，5^2，5^3，5^4，5^5，5^6

(2) 2，6，18，54，162，486

若等比數列 $\langle a_n\rangle$ 的首項為 a_1，公比為 r ，則各項之間的關係如下：

$$a_1 \xrightarrow{\times r} a_2 \xrightarrow{\times r} a_3 \xrightarrow{\times r} a_4 \xrightarrow{\times r} a_5 \xrightarrow{\times r} \cdots \xrightarrow{\times r} a_{n-1} \xrightarrow{\times r} a_n$$

由上面的關係我們可以推得等比數列的一般項：

$a_1=a_1r^0=a_1r^{1-1}$

$a_2=a_1r=a_1r^{2-1}$

$a_3=a_2r=(a_1r)\times r=a_1r^2=a_1r^{3-1}$

$a_4=a_3r=(a_1r^2)\times r=a_1r^3=a_1r^{4-1}$

$a_5=a_4r=(a_1r^3)\times r=a_1r^4=a_1r^{5-1}$

$\vdots$

$$a_{n-1} = a_{n-1}r = (a_1 r^{n-3}) \times r = a_1 r^{n-2}$$

$$a_n = a_{n-1}r = (a_1 r^{n-2}) \times r = a_1 r^{n-1}$$

其中 $a_n = a_1 r^{n-1}$ 稱爲等比數列的一般項。

● 公式

等比數列〈a_n〉的首項爲a_1，公比爲 r，則

(1) $a_n = a_1 r^{n-1}$

(2) $a_n = a_m r^{n-m}$

演示 2

(1) 試求等比數列 $\frac{1}{2}$，1，2，4…的第 8 項。

(2) 等比數列〈a_n〉的首項爲 1000，公比爲 $\frac{1}{10}$，求此數列的第 6 項。

解：(1)已知首項 $a_1 = \frac{1}{2}$，公比 $r = \frac{2}{1} = 2$，

則 $a_8 = a_1 r^7 = \frac{1}{2} \times 2^7 = 2^6 = 64$。

(2)已知首項 $a_1 = 1000$，公比 $r = \frac{1}{10} = 2$，

則 $a_6 = a_1 r^5 = 1000 \times (\frac{1}{10})^5 = \frac{1000}{100000} = \frac{1}{100}$。

自我練習 2

若一個等比數列〈a_n〉的首項爲 $\frac{1}{64}$，公比爲 2，求此等比數列的第 8 項。

演示 3

等比數列〈a_n〉的首項爲 3，第 6 項爲 729，求此數列的公比。

解：已知首項 $a_1=3$，$a_6=729$

設公比爲 r

因爲 $a_6=a_1r^5\Rightarrow 729=3r^5$

$\Rightarrow r^5=243$

$\Rightarrow r=3$

答：公比是 3。

自我練習 3

等比數列〈a_n〉的首項爲 64，第 6 項爲 2，求此數列的公比。

4－2.2 等比中項

若 a、b、c 三數成等比，則 b 稱爲 a 和 c 的等比中項。

因爲公比 $=\dfrac{後一項}{前一項}\Rightarrow\dfrac{b}{a}=\dfrac{c}{b}\Rightarrow b^2=ac$

$\Rightarrow b=\pm\sqrt{ac}$

所以 a 和 c 的等比中項爲 $\sqrt{ac}$ 或 $-\sqrt{ac}$。

演示 4

試求 4 和 16 的等比中項。

解：設 b 爲 4 和 16 的等比中項，則

$b^2 = 4\times 16 = 64 \Rightarrow b = \pm 8$

答：4 和 16 的等比中項爲 ± 8。

自我練習 4

試求 -10 和 $-\dfrac{1}{10}$ 的等比中項。

4－2.3 等比級數

國王在 64 格棋盤上付出米粒的總數量爲 $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{62}+2^{63}$，其總和爲 $2^{64}-1$，這是如何計算出來的呢？將等比數列 $\langle a_n \rangle$ 中的每一項依序用「＋」號連接起來：$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 就稱爲等比級數。

我們常用 S_n 表示等比級數的前 n 項總和，即

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$；

若等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項爲 a_1，公比爲 r，則前 n 項的和 S_n 可寫成

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} \cdots\cdots\cdots (1)$

將這個式子乘上 r 得

$rS_n = a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + \cdots + a_1 r^n \cdots\cdots\cdots (2)$

(1)－(2)兩式相減得

$$\begin{array}{rll} S_n = & a_1 + a_1 r + a_1 r^2 + \cdots + a_1 r^{n-1} & \\ -)\ rS_n = & \quad\ a_1 r + a_1 r^2 + a_1 r^3 + a_1 r^4 + \cdots + a_1 r^n & \\ \hline (1-r)S_n = & a_1 & -a_1 r^n \end{array}$$

所以 $(1-r)S_n = a_1 - a_1 r^n = a_1(1-r^n)$

因此，當 $r \neq 1$ 時，$S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$；

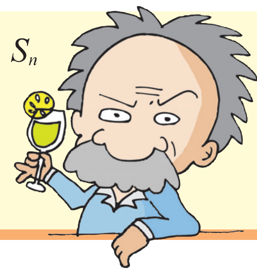
另外，當 $r = 1$ 時，$S_n = a_1 + a_1 + a_1 + \cdots + a_1 = na_1$

● **公式**

等比數列 $\langle a_n \rangle$ 的首項爲 a_1，公比爲 r，則前 n 項總和 S_n

爲(1) 當 $r = 1$ 時 $S_n = na_1$，

(2) 當 $r \neq 1$ 時，$S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}$



適用於公比小於 1。

適用於公比大於 1。

演示 5

有一等比級數的首項爲 10，公比爲 2，試求此級數前 8 項的總和。

解：已知首項 $a_1 = 10$，公比 $r = 2$，項數 $n = 8$，

由公式 $S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r}$ 可得

$S_8 = \dfrac{10(2^8-1)}{2-1} = \dfrac{10(256-1)}{1} = 10 \times 255 = 2550$

自我練習 5

有一等比級數的首項爲 4，公比爲－3，試求此級數的前 6 項的總和。

4 － 2.4 等比級數的應用：複利的計算

複利是利息除了會根據本金計算外，新獲得的利息同樣可以再生利息，因此俗稱「利滾利」或「利疊利」。以定期存款爲例，假設有 1000 萬元在銀行定存 3 年，年利率都是 3%，同時跟銀行約定每滿 1 年可複利一次，第 1 年期滿的時候，你的本利和爲 $1000(1+3\%)=1030$ 萬元，其中 1000 萬是本金，30 萬是利息；第 2 年開始的時候利息併入本金，所以你的本金爲 1030 萬元，於第 2 年期滿時，可獲得的利息爲 $1030\times 3\%=30.9$ 萬元，所以你的本利和爲 $1030(1+3\%)=1060.9$ 萬元；第 3 年開始的時候以 1060.9 萬元爲本金，於第 3 年期滿時，可獲得的利息是 $1060.9\times 3\%=31.827$ 萬元，所以你的本利和爲 $1060.9(1+3\%)=1092.727$ 萬元。

如果沒有複利，你的本金永遠是 1000 萬元，每年固定領 30 萬元的利息，3 年下來本利和爲 1090 萬元。因此，有沒有複利在三年結束後的差距爲 $1092.727-1090=2.727$ 萬元的利息。

● 複利計算公式

本金爲 p，一期的固定利率爲 i，以複利計算，經過 n 期後的本利和爲 $p(1+i)^n$

演示 6

20 年前，某甲出生時，媽媽在銀行存入一百萬元作爲教育基金，如果銀行年利率爲 2.3%，每年依複利計息一次，試問 20 年後某甲的教育基金有多少元？[已知 $(1.023)^{20}\approx 1.5787$]

解：已知本金 p 為 100 萬，年利率 i 為 2.3%，期數 n 為 20，

則 20 年後本利和為

$100(1+2.3\%)^{20}=100\times(1.023)^{20}=157.87$(萬)

答：教育基金有 157.87 萬元。

自我練習 6

某乙擁有本金 10 萬元，投資某一種高風險商品的年報酬率 40 %，每年所獲得報酬，仍再投資不領回，試求 5 年後本利和為多少？

〔已知$(1.4)^5\approx5.3782$〕

4-2 自我挑戰

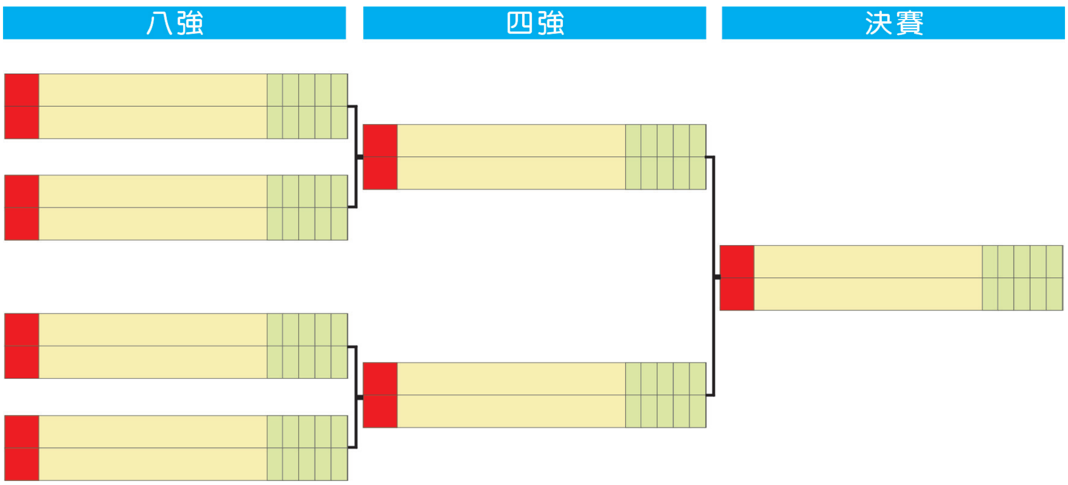
1. 試問下列那些是等比數列？如果是，請寫出其公比。

(1) $1，-1，1，-1，1，-1$

(2) $1，\frac{1}{4}，\frac{1}{9}，\frac{1}{16}，\frac{1}{25}，\frac{1}{36}$

(3) $\sqrt{3}，1，\frac{1}{\sqrt{3}}，\frac{1}{3}，\frac{1}{3\sqrt{3}}，\frac{1}{9}$

2. 溫布頓網球錦標賽（*Wimbledon championships*）是網球四大公開賽之一，每年進入單打會內賽的選手有 128 名，採單淘汰賽制，若世界排名第三的選手從第一輪開始挑戰，請問必須進行幾場比賽才能拿下冠軍？



3. 若等比數列的首項為 1250，公比為$\frac{1}{5}$，試問第幾項為 10？

4. 若 3 和 x 的等比中項為± 9，求 x 的值。

5. 試求等比級數$2+2^2+2^3+\cdots+2^9$ 的值。

6. 若等比數列 $\langle a_n \rangle$ 中，$a_1=4$，公比為-1，求此數列的前 101 項的總和為多少？

7. 若一個等比級數的首項為 20，公比為 3，和為 2420，求此級數的項數。

8. 求 $9+99+999+9999+99999$ 的和。

本單元重點整理

1. 數列：依照順序排成一列的數，以a_1、a_2、a_2 、…、a_{n-1}、a_n表示，其中 a_1 稱第一項或首項，a_2 稱第二項，…，a_n 稱第 n 項或末項，以符號〈a_n〉表示一個數列。

2. 等差數列與等差級數

⑴ 等差數列：數列〈a_n〉滿足任意相鄰兩項的差（後一項減前一項）為定值。

即$a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}=d$(定值)

一般項 a_n 公式 ①$a_n=a_1+(n-1)d$

②$a_n=a_m+(n-m)d$。

⑵若 a、b、c 三數成等差數列，則 b 稱為 a 和 c 的等差中項。

a、b、c 滿足關係式 $b=\dfrac{a+c}{2}$ 。

⑶等差級數：將等差數列中的每一項依序用「＋」號連接起來的式子：

$a_1+a_2+\cdots+a_n$

前 n 項總和 S_n 的公式：

※已知首項 a_1，末項a_n 和項數 n，則前 n 項總和：

$$S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$$

※ 已知首項 a_1，公差 d 和項數 n ，則前 n 項總和：

$$S_n=\frac{n}{2}[2a_1+(n-1)d]。$$

3. 等比數列與等比級數

⑴ 等比數列：數列〈a_n〉中的每一項皆不為 0，滿足任意相鄰兩項，以後一項除以前一項皆為定值。即：

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{a_3}{a_2}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n-1}}=r\,(r\text{ 為定值})$$

一般項公式：

※ $a_n = a_1 r^{n-1}$

※ $a_n = a_m r^{n-m}$

(2)若 a、b、c 三數成等比，則 b 稱爲 a 和 c 的等比中項。

a、b、c 滿足以下的關係：

※ $b^2 = ac$

※ $b = \pm\sqrt{ac}$

(3)等比級數：將等比數列中的每一項依序用「＋」號連接起來的式子。

前 n 項總和 S_n 的公式：

※ 當 $r=1$ 時，$S_n = na_1$

※ 當 $r\neq 1$ 時，$S_n = \dfrac{a_1(1-r^n)}{1-r} = \dfrac{a_1(r^n-1)}{r-1}$