實用技能學程輔助教材

數學

II

目錄 Contents

單元一　方程式與應用

1－1　一元二次方程式與二元一次方程式 ………… 2
1－1.1　一元二次方程式 ………… 2
一、一元二次方程式求解的公式 ………… 3
二、使用公式解一元二次方程式 ………… 5
1－1.2　二元一次方程式組 ………… 9
一、二元一次方程式組求解的公式 ………… 9
二、二元一次方程式的幾何意義 ………… 15

1－2　方程式的應用實例 ………… 24

單元二　比例的應用

2－1　直角三角形三邊比例關係 ………… 42
2－1.1　比與比值 ………… 42
一、比的概念 ………… 42
二、比值與比例式 ………… 43
三、相似三角形比例關係 ………… 47

2－1.2　直角三角形三邊比例關係 ………… 49
一、特別角度的直角三角形邊長的比 ………… 50
二、直角三角形的相互比例關係 ………… 53

2－2　簡易三角測量 ………… 63

單元三　統計圖表

3－1　資料蒐集整理及統計量分析 ………………… 76

3－1.1　資料蒐集 ………………………………………… 77

3－1.2　資料整理 ………………………………………… 78

3－1.3　統計量分析 ……………………………………… 82

3－2　統計圖表的認識與製作 ……………………… 93

3－2.1　認識統計圖 ……………………………………… 93

3－2.2　統計圖表的製作 ………………………………… 94

單元四　機率概念

4－1　集合的基本概念 ………………………………… 136

4－1.1　集合的表示法 ………………………………… 137

4－1.2　集合的關係 …………………………………… 138

4－1.3　集合的運算 …………………………………… 145

4－2　樣本空間及機率概念 ………………………… 150

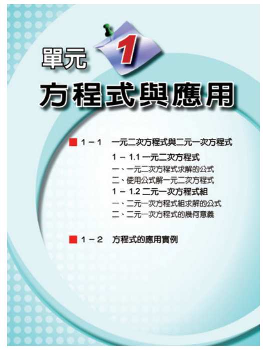
4－2.1　樣本空間 ……………………………………… 151

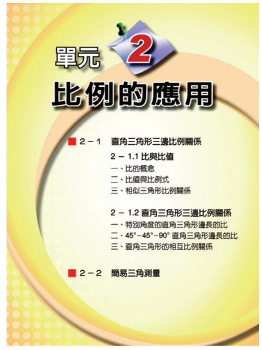
4－2.2　機率概念 ……………………………………… 155

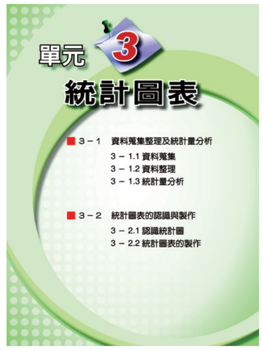
一、機率的定義 ………………………………… 155

二、機率的性質 ………………………………… 157

三、期望值 ……………………………………… 158







數學 II

實用技能學程輔助教材

希望學生能熟稔數學的基本概念及基礎運算，對於學習有所幫助，且能應用於未來生活上。所以選用之單元均以實用性爲主要考量，而內容及使用之文詞均淺顯易懂。

本書在各重點之後，編列有「演示」，供教師講解；而每一例題之後有「自我練習」，供學生立即演練，以使學生能熟稔學習內容。每一節之後附有自我挑戰，供學生於課堂或課後加強練習，期能藉反覆練習，以增強學習效果。

單元 1

方程式與應用

■ 1－1　一元二次方程式與二元一次方程式

1－1.1 一元二次方程式

一、一元二次方程式求解的公式

二、使用公式解一元二次方程式

1－1.2 二元一次方程式組

一、二元一次方程式組求解的公式

二、二元一次方程式的幾何意義

■ 1－2　方程式的應用實例

單元一　方程式與應用

方程式是用來解決問題的，希臘數學家丟番圖（*Diophantu*，約公元 246~330 年），就討論以方程解決問題，後來的波斯數學家花拉子米（全名是阿布•阿卜杜拉•穆罕默德•伊本•穆薩•花拉子米 *Abu Abdallah Muḥammad bin Mūsā al－Khwārizmī*，約 780 年－約 850 年）的「代數學」是第一本解決一次方程及一元二次方程的系統著作，所以方程式源起很早，對應用於日常生活中解決問題是非常好的工具。

本單元首先介紹一元二次方程式及二元一次方程組的公式解法，然後再討論方程式的應用。求解一元二次方程式及二元一次方程組是應用的基礎，基石穩固，應用才能得心應手。

1－1　一元二次方程式與二元一次方程式

1-1.1 一元二次方程式

甚麼叫方程式？「如果某數加 3 等於 5，請問某數是多少？」，此一問題中的某數以符號「□」或文字 x、y、z 等代表，然後寫成算式：「(□＋3＝5」或「 $x+3=5$」，像這樣含有符號或文字的等式就叫**方程式**。

一個方程式，經過化簡後，依代表某數的符號或文字（方程式中稱為未知數）的個數及未知數最高次方，稱為幾元幾次方程式。僅有一個未知數，且未知數的次數最高為「1」次方，這種方程式就稱為「一元一次方程式」；而僅有一個未知數，且未知數的次方最高為「2」次方的方程式，就

稱為「一元二次方程式」；而有兩個未知數，且未知數的次方最高為「1」次方的方程式，就稱為「二元一次方程式」；其他可依此類推。而兩個二元一次方程式一起求其共同的解，就稱這兩個二元一次方程式為二元一次方程組或二元一次聯立方程式。

什麼是方程式的解呢？若將某一個數帶入方程式的未知數，能使等號左邊的值和右邊的值相等，我們稱此數為該方程式的解或是根。例如：以$x=2$代入$3x^2-5x=2$中，得左式$=3\times(2)^2-5\times 2=12-10=2=$右式，所以 2 為$3x^2-5x=2$的解（根）。像這樣找出滿足方程式的數（$x$所代表的數），就稱為**解方程式**。

一、一元二次方程式求解的公式

一元二次方程式的解法有數種，本單元僅介紹公式法，請使用計算機加快運算速度。一元二次方程式的公式，是利用配方法所得，首先我們利用配方法來導出公式，再介紹如何利用公式求解一元二次方程式。我們可以將任一個 x 的一元二次方程式整理化簡成下列形式：

$ax^2+bx+c=0$，其中$a\neq 0$。

由配方法導出 x 的解如下：

$$ax^2+bx+c=0，a\neq 0$$
$$\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}=0$$
$$\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$
$$\Rightarrow x^2+\frac{b}{a}x+(\frac{b}{2a})^2=-\frac{c}{a}+(\frac{b}{2a})^2$$
$$\Rightarrow (x+\frac{b}{2a})^2=\frac{b^2-4ac}{4a^2}$$
$$\Rightarrow x+\frac{b}{2a}=\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$\Rightarrow x=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$
$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

即 $x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 或 $x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

所以解一元二次方程式，只要將方程式中之係數 a、b、c 代入 $x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 或 $x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 再利用計算機求出 x 所代表的數值即可。

因爲 b^2-4ac 可能是正數、0 或負數。當 b^2-4ac 爲負數時，$\sqrt{b^2-4ac}$ 爲虛數不是實數，所以 b^2-4ac 開平方的結果會影響 x。所以我們稱 b^2-4ac 是一元二次方程式**根的判別式**。b^2-4ac 對 x 的結果影響如下：

(1)當 $b^2-4ac>0$ 時，$\Rightarrow x+\dfrac{b}{2a}=\pm\dfrac{b^2-4ac}{2a}$，即 $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，

因爲 $\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\neq\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，所以 x 爲二個相異實根。

(2)當 $b^2-4ac=0$ 時，$\Rightarrow (x+\dfrac{b}{2a})^2=0$，即 $x=\dfrac{-b}{2a}$、$\dfrac{-b}{2a}$，因爲 $\dfrac{-b}{2a}=\dfrac{-b}{2a}$，所以 x 爲二個相等的實根。

(3)當 $b^2-4ac<0$ 時，因爲 $\sqrt{b^2-4ac}$ 無實數平方根，所以 x 非實根。

由以上可以獲得：

若一元二次方程式$ax^2+bx+c=0$，$a\neq0$，則

(1) $b^2-4ac>0\Leftrightarrow$有**二個相異的實根**，即兩個解為：

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{ 或 }x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{。}$$

(2) $b^2-4ac=0\Leftrightarrow$有**二個相等實根**，即 $x=\dfrac{-b}{2a}$（重根）。

(3) $b^2-4ac<0\Leftrightarrow x$ **無實數解**（一般稱為無解）。

即一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）解的公式為：

$$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\text{ 或 }x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

二、使用公式解一元二次方程式

解一元二次方程式的要領：

1. 首先檢查是否為一元二次方程式：方程式經化簡整理後，是否成為下列形式？
   $ax^2+bx+c=0$，其中 $a\neq0$。
2. 用判別式 b^2-4ac 判別有解或無解；當有解時，再將方程式中之係數 a、b、c 代入公式 $x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ 或 $x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，即可獲得解答。

演示 1

判斷下列等式是否為一元二次方程式？

(1) $x^2-5x+3=-5x$　(2) $3x^2+2x+1=3x^2-2$

解 (1) $x^2-5x+3=-5x$ 化簡後

$\Rightarrow x^2-5x+5x+3=0$

$\Rightarrow x^2+3=0$

x^2 係數爲 $1\neq 0$

故等式 $x^2-5x+3=-5x$ 是一元二次方程式。

(2) $3x^2+2x+1=3x^2-2$ 化簡後

$\Rightarrow 3x^2+2x+1-3x^2+2=0$

$\Rightarrow 2x+3=0$，缺 x^2 項

故等式 $3x^2+2x+1=3x^2-2$ 不是一元二次方程式。

自我練習 1

找出下列等式中那些是一元二次方程式？

(1) $5x^2+2x+1=5x^2-2x-1$　　(2) x^2+2x+3

(3) $x^2-3x+2=-3x+2$　　(4) $1+5x-3x^2=0$

演示 2

利用公式及計算機，解下列一元二次方程式（解答不是整數時取小數一位）。(1) $x^2+5x-24=0$　(2) $3x^2+7x+5=0$　(3) $x^2-14x+49=0$

解 (1)令 $a=1$、$b=5$、$c=-24$

則 $b^2-4ac=5^2-4\cdot1\cdot(-24)=121>0$，有二個相異的實根；

所以$x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-5+\sqrt{121}}{2\times 1}=\dfrac{-5+11}{2}=3$，

$x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-5-\sqrt{121}}{2\times 1}=\dfrac{-5-11}{2}=-8$

所以此方程式的解爲3，-8

(2)令 $a=3$、$b=7$、$c=5$

則 $b^2-4ac=7^2-4\cdot3\cdot5=-11<0\Rightarrow x$ 非實數

所以此方程式無實數解（無解）

(3)令 $a=1$、$b=-14$、$c=49$

則 $b^2-4ac=(-14)^2-4\times1\times49=0$為二根相等（重根）

$x=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-(-14)+\sqrt{0}}{2\times1}=\dfrac{14}{2}=7$ 或

$x=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-(-14)-\sqrt{0}}{2\times1}=\dfrac{14}{2}=7$

所以此方程式的解為 7（重根）。

自我練習 2

利用公式及計算機，求下列方程式的根（根不是整數時，以四捨五入取小數一位）。

(1) $2x^2+7x-15=0$　(2) $3x^2-2x+1=0$

演示 3

已知方程式 $ax^2+6x-5=0$ 有二個相等實根，試求 a 的值？

解 方程式有兩個相等實根

$\Rightarrow b^2-4ac=0$

$\Rightarrow 6^2-4a(-5)=0$

$\Rightarrow 36+20a=0$

$\Rightarrow a=-\dfrac{9}{5}$（或$-1.8$）

自我練習 3

已知 k 為正整數，且方程式 $kx^2+3x+2=0$ 有二個相異實根，則 k 值為何？

●當一元二次方程式中的各項係數為分數或小數時，可先將方程式的係數化為整數後，再利用公式求解，此時方程式的解與原方程式的解完全相同。

如：$\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}=0$，可先將方程式兩邊同乘以 12，得

$8x^2+6x-9=0$，再代公式求解，如此一來可避免繁複的計算過程。

同理：

$0.5x^2-1.2x-1.5=0$，先將方程式兩邊同乘以 10，得

$5x^2-12x-15=0$，再代入公式利用計算機求出解答。

演示 4

請利用公式及計算機，求方程式 $\frac{2}{3}x^2+\frac{5}{6}x-\frac{1}{4}=0$ 的解。（解答不是整數時，以四捨五入取小數二位）。

解 將方程式 $\frac{2}{3}x^2+\frac{5}{6}x-\frac{1}{4}=0$ 兩邊同乘以 12

$\Rightarrow 8x^2+10x-3=0$

因為 $b^2-4ac=10^2-4\cdot 8\cdot(-3)=196>0$

$x=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-10+\sqrt{196}}{2\times 1}=\frac{1}{4}=0.25$ 或

$x=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-10-\sqrt{196}}{2\times 1}=-\frac{3}{2}=-1.50$

所以此方程式的解為 0.25 或 -1.50

自我練習 4

請利用公式及計算機，求方程式 $0.3x^2-x-0.8=0$ 的解（解答不是整數時，四捨五入取小數一位）。

1-1.2 二元一次方程式組

我們可以將任一個 x 的一元二次方程式整理化簡成下列形式：

$ax+by+c=0$，且 $a^2+b^2\neq 0$。

為什麼要 $a^2+b^2\neq 0$？因為若 $a=0$ 或 $b=0$，則此等式就不一定是二元方程式，有可能是一元一次方程式了，所以要解二元一次方程組前一定要整理後再求解。

只有一個二元一次方程式時，它的解是如何？設 $x=x_1$，且 x_1 為實數，將 x_1 代入方程式 $ax+by+c=0$，得：

$$ax_1+by+c=0\Rightarrow by=-ax_1-c\Rightarrow y=\frac{-ax_1-c}{b}$$

當 x_1 的值改變，則 y 的值也隨著改變。x_1 為實數，而實數有無限多個，因此 y 亦有無限多個，亦即一個 x_1 對應一個 y，所以滿足單一的二元一次方程式的數將有無限多組，也就是二元一次方程式有無限組解。因此，兩個二元一次方程式才可能有共同的解，本單元把兩個二元一次方程式放在一起，以找出共同的解，就稱為解**二元一次方程組**。

一、二元一次方程式組求解的公式

解二元一次方程式組的方法有加減消去法、代入消去法或克拉瑪（Cramer）公式法（簡稱公式法）。本節僅介紹公式法，並將公式以行列式表示，那麼行列式是什麼？

行列式就是將 n^2 個數排成 n 行 n 列的陣列，稱之為 n 階行列式（ n 是大於 1 的正整數），並以 $\begin{vmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}$ 表示；其中構成此行列式的數稱為元素(或元)，行或列的數目稱為階。行列式必需依照一定的運算規則運算，其結果為一個數值，也就是每一個行列式都代表一個數值。

行列式要求其所代表的數有一定的運算規則，配合二元一次方程組本單元只介紹二階行列式。下列為二階的計算規則，至於三階以上的行列式，其展開的運算法與二階的不同，如有需要，可閱讀其他書籍或請教老師。二階行列式只有兩行兩列，它的運算規則為：

設將實數 a、b、c、d，排成二階行列式為 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$，其值為 $ad-bc$，即

$$\begin{array}{rcl} \begin{matrix}\text{第 1 列}\rightarrow\\ \text{第 2 列}\rightarrow\end{matrix} & \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} & = ad - bc \\ & \begin{matrix}\downarrow & \downarrow\\ \text{第 1 行} & \text{第 2 行}\end{matrix} & \end{array}$$

演示 5

試求行列式 $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$ 的值。

解 $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 3\times 5-(-2)\times 7 = 15+14 = 29$

自我練習 5

試求行列式$\begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 5 & 8 \end{vmatrix}$的值。

二元一次方程組解的公式是利用加減消去法或代入消去法，再以行列式代表其繁雜的算式而得，其過程如下：

假設有一組二元一次聯立方程組，經整理後爲$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，我們現在利用加減消去法，以導引出二元一次方程組的公式解。

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \cdots\cdots ① \\ a_2x+b_2y=c_2 \cdots\cdots ② \end{cases}$$

由①× b_2－②× b_1 消去y，得$(a_1b_2-a_2b_1)x=c_1b_2-c_2b_1 \cdots\cdots ③$

由②× a_1－①× a_2 消去x，得$(a_1b_2-a_2b_1)y=a_1c_2-a_2c_1 \cdots\cdots ④$

由③和④，可發現：

$a_1b_2-a_2b_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ⇔此行列式是由方程組 x、y 的係數所組成。

$c_1b_2-c_2b_1=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ ⇔此行列式是由方程組的常數項與 y 的係數所組成。

$a_1c_2-a_2c_1=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ ⇔此行列式是由方程組的 x 的係數與常數項所組成。

爲了方便，我們假設

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}，\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}，\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

因此，③和④，可寫成$\begin{cases} \Delta\times x=\Delta_x \\ \Delta\times y=\Delta_y \end{cases}$

則$x=\dfrac{\Delta x}{\Delta}$，$y=\dfrac{\Delta y}{\Delta}$

x，y 是分數形式，分數的分母不得是零，所以Δ會影響結果，Δ的變化會產下列三種結果：

(1) 當 $\Delta=0$，$\Delta_x \neq 0$或$\Delta_y \neq 0$，則 x，y 不存在。

例如：二元一次方程組$\begin{cases} -x-2y=3 \cdots\cdots(1) \\ x+2y=-4 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

由(1) $x=-3-2y$ 代入(2)

$-3-2y+2y=4 \Rightarrow -2y=2y=-4+3$

$0\times\ y=-1 \Rightarrow 0=-1$，此等式不合理

所以 x，y 不存在。

此時$\Delta=\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-2+2=0$

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}=6-8=-2\neq 0$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=4-3=1\neq 0$

故二元一次方程組，當$\Delta=0, \Delta_x \neq 0$ 或$\Delta_y \neq 0$ 時 x，y 不存在，即此方程組無解。

(2)當$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$，則 x，y 可能有很多種情況。

例如：二元一次方程組$\begin{cases} -x-2y=4 \cdots\cdots(1) \\ x+2y=-4 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

由(1) $x=-4-2y$ 代入(2)

$-4-2y+2y=-4 \Rightarrow -2y+2y=-4+4$

$0\times\ y=0 \Rightarrow$ 即 y 代入任何數，此等式永遠是對的（稱之爲恆等式）。

此時 $\Delta=\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-2+2=0$

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}=8-8=0$ ，$\Delta_y=\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=4-4=0$

故二元一次方程組，當$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$ 時，x，y 代表的數有無限多個，即此方程組有無限組解。

(3)當$\Delta \neq 0$，則 x，y 爲實數。

例如：二元一次方程組$\begin{cases} -x-2y=2\cdots\cdots(1) \\ x+2y=4\cdots\cdots(2) \end{cases}$

由(1) $x=2y-2$ 代入(2)

$2y-2+2y=4 \Rightarrow 2y+2y=4+2$

$4y=6 \Rightarrow y=1.5$

將 $y=1.5$ 代入(1)，得 $x=1$

此時 $\Delta=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-2-2=-4$

$\Delta_x=\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=4-8=-4$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=-4-2=-6$

則 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=\dfrac{-4}{-4}=1$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=\dfrac{-6}{-4}=1.5$

依照解的情況，我們分別給方程組一個名稱：

(1)當$\Delta=0$，$\Delta_x \neq 0$ 或 $\Delta_y \neq 0$

此方程組無解，此方程組稱爲矛盾方程組。

(2)當$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0$

此方程組有無限多組解，此方程組稱爲相依方程組。

(3)當$\Delta \neq 0$

此方程組恰有一解，此方程組稱爲相容方程組，

其解爲 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$

此二元一次方程組的公式$x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$，又稱爲克拉瑪（*Cramer*）公式。二元一次方程組的解也可以不用符號Δ代表行列式，直接用行列式套入，即爲：$x=\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$，$y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$

有沒有比較方便？可依照自己的習慣選用。

演示 6

利用克拉瑪(*Cramer*)公式,求方程組$\begin{cases}2x+y=5\\3x+2y=-4\end{cases}$的解。

解 $\Delta=\begin{vmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{vmatrix}=1$,$\Delta_x=\begin{vmatrix}5 & 1\\-4 & 2\end{vmatrix}=14$,$\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 5\\3 & -4\end{vmatrix}=-23$

$\Rightarrow x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}=14$,$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}=-23$

自我練習 6

利用克拉瑪(*Cramer*)公式,求方程組$\begin{cases}2x-y=3\\x+2y=4\end{cases}$的解。

演示 7

利用克拉瑪(*Cramer*)公式,求方程組$\begin{cases}2x-y=3\\4x+2y=4\end{cases}$的解。

解 $\Delta=\begin{vmatrix}2 & -1\\4 & -2\end{vmatrix}=0$,$\Delta_x=\begin{vmatrix}3 & -1\\1 & -2\end{vmatrix}=-5$,$\Delta_y=\begin{vmatrix}2 & 3\\4 & 1\end{vmatrix}=-5$

因為 $\Delta=0$,$\Delta_x=-5$ $\Rightarrow$ 此方程組無解。

自我練習 7

利用克拉瑪（*Cramer*）公式，求方程組$\begin{cases}3x-9y=-2\\-2x+6y=1\end{cases}$的解。

演示 8

利用克拉瑪（*Cramer*）公式，求方程組 $\begin{cases}x+2y=-2\\-x-2y=2\end{cases}$ 的解。

解 $\Delta=\begin{vmatrix}1&2\\-1&-2\end{vmatrix}=0$，$\Delta_x=\begin{vmatrix}-2&2\\2&-2\end{vmatrix}=0$，$\Delta_y\begin{vmatrix}1&2\\-1&-2\end{vmatrix}=0$

因爲$\Delta=\Delta_x=\Delta_y=0\Rightarrow$此方程組無限組解。

自我練習 8

利用克拉瑪（*Cramer*）公式，求方程組$\begin{cases}-2x+y=1\\4x-2y=-2\end{cases}$的解。

二、二元一次方程式的幾何意義

二元一次方程式的圖形是一直線，若二元一次方程式$ax+by+c=0$，且$a^2+b^2\neq0$，則方程式的一組解爲 x_1、y_1，將這組解寫成數對(x_1,y_1)，此數對恰可表示一個點的坐標，即每一組解（數對）爲直角坐標上的一個點。所以我們只要找出兩組滿足二元一次方程式的解，就可畫出二元一次方程式的圖形。

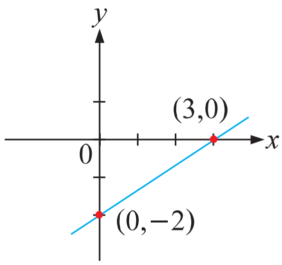
演示 9

在坐標軸上，描繪出方程式 $2x-3y-6=0$ 的圖形。

解 (1) 找出通過點（方程式的解）

x	0	3
y	-2	0

(2) 繪圖



自我練習 9

在坐標軸上，描繪出方程式 $x-2y-2=0$ 的圖形。

二元一次方程式在直角坐標平面上的圖形是一條直線，直線上每一個點坐標都會滿足這二元一次方程式。二元一次方程組就是兩條直線，而在直角坐標平面上，兩條直線可能相交或不相交，相交就有交點，不相交就沒有交點，交點爲這二直線的共同點，此交點的坐標亦爲二方一次程組的解。

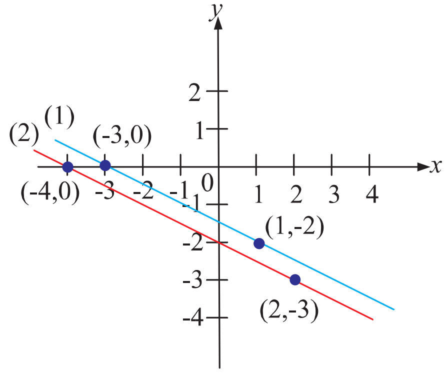
我們將前面的例子，繪出各方程組的圖形，觀察其圖形的變化：

(1)二元一次方程組$\begin{cases} -x-2y=\quad 3 \cdots\cdots(1) \\ \quad x+2y=-4 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

的解爲無解。

它的圖形：

方程式	(1)		(2)	
x	-3	1	2	-4
y	0	-2	-3	0



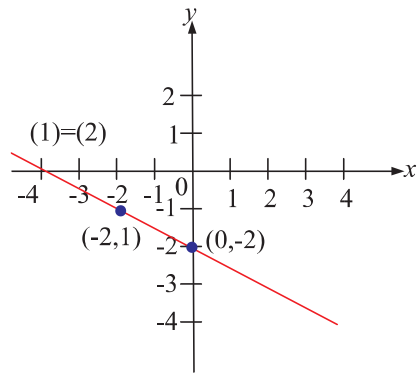
此二元一次方程組的圖形是方程式(1)的直線和方程式(2)的直線相互平行。所以當方程組無解時，方程組的圖形是兩平行線。

(2)二元一次方程組$\begin{cases} -x-2y=\quad 4 \cdots\cdots(1) \\ \quad x+2y=-4 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

的解爲無限多組解。

它的圖形：

方程式	(1)		(2)	
x	0	-2	0	-2
y	-2	-1	-2	-1



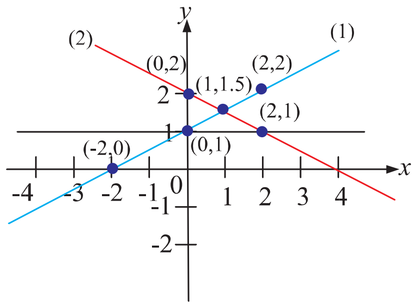
此二元一次方程組的圖形是方程式(1)的直線和方程式(2)的直線重合（也就是同一直線）。所以當方程組有無限組解時，這方程組的圖形是重合。

(3)二元一次方程組$\begin{cases} -x+2y=2 \cdots\cdots(1) \\ \quad x+2y=4 \cdots\cdots(2) \end{cases}$

的解爲 $x=1$，$y=1.5$

它的圖形：

方程式	(1)			(2)		
x	0	1	-2	0	1	2
y	1	1.5	0	2	1.5	1



此二元一次方程組的圖形是方程式(1)的直線和方程式(2)的直線相交於一點，交點坐標恰爲方程組的解。所以當方程組的解爲僅一組時，這方程組的圖形是兩直線相交於一點，而此點的坐標恰爲它的解。

綜合以上，我們可獲得結論如下：

(1)當 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$，則此方程組恰有一解，

其解爲 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$， $y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$，或 $x=\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$， $y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$

⇔此方程組爲相容方程組

⇔幾何意義爲兩直線相交於一點

(2)當 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ ，$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\neq 0$

則此方程組無解

⇔此方程組爲矛盾方程組

⇔幾何意義爲兩直線相互平行

(3)當 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$ ，$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$

則此方程組有無限多組解

$\Leftrightarrow$此方程組為相依方程組

$\Leftrightarrow$幾何意義為兩直線重合

演示 10

若一方程組 $\begin{cases} 4x+y=1 \\ ax-2y=2 \end{cases}$ 幾何圖形為兩直線相交於一點，試求 a。

解 因為方程組幾何圖形為兩直線相交於一點，即恰有一組解，所以 $\Delta \neq 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ a & -2 \end{vmatrix} \neq 0$

$\Rightarrow -8-a \neq 0$

$\Rightarrow a \neq -8$，即 a 為 -8 以外的任一實數。

自我練習 10

若一方程組 $\begin{cases} 2x+ky=1 \\ x-2y=2 \end{cases}$ 恰有一組解，試求 k。

演示 11

若一方程組 $\begin{cases} 2x-ay=-a \\ ax-2y=2 \end{cases}$ 為無解，試求 a。

解 因為方程組無解，所以 $\Delta=0$，但 $\Delta_x \neq 0$ 或 $\Delta_y \neq 0$

$\Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -a \\ a & -2 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -4+a^2=0$

$\Rightarrow a^2=4 \Rightarrow a=\pm 2$

$\Rightarrow$因為$a=2$ 或 $a=-2$ 都能使$\Delta_x \neq 0$ 或$\Delta_y \neq 0$，

因此$a=2$ 或 $a=-2$。

自我練習 11

若一方程組 $\begin{cases} x-ky=-k \\ kx-y=1 \end{cases}$ 為無解，試求 k。

參考資料：矩陣的介紹

前面我們介紹了二階行列式，而行列式的階數可以二階、三階、四階、…。矩陣（*Matrix*）又是什麼？行列式和矩陣差別在哪？把一堆數字放在一起，排成行與列的數目相等的陣列是行列式，而排成一個矩形的陣列就是矩陣，矩陣的行與列的數目不一定相同，所以行列式是矩陣的一種，有時把行列式稱為方塊矩陣（兩者最大差異為行數與列數相等的叫做行列式，矩陣的行數與列數就不一定要相等）。矩陣的運算有一定的規範，若有需要可以閱讀其他書籍或請教老師繼續學習。

數學上，一個 $m\times n$ 的矩陣是一個由 m 列（*row*） n 行（*column*）元素置換成的矩形陣列。矩陣裡的元素可以是數字、符號或數學式。以下是一個由 6 個數字元素構成的 2 列 3 行的矩陣（括號兩者均可）：

$$\begin{bmatrix} 1 & 8 & -7 \\ 5 & -2 & 6 \end{bmatrix} \text{或} \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 \\ 5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$$

一般矩陣的通式如下：

$m\times n$ 矩陣（m 為列數，n 為行數），即此為 m 列 n 行的矩陣；橫的為列（足標由上往下數）以i表列次，直的為行（足標由左往右數）以j表行次，

$a_{i,j}$ 為元素，如：$a_{2,3}$為該矩陣中第 2 列第 3 行之元素。

m×n 矩陣

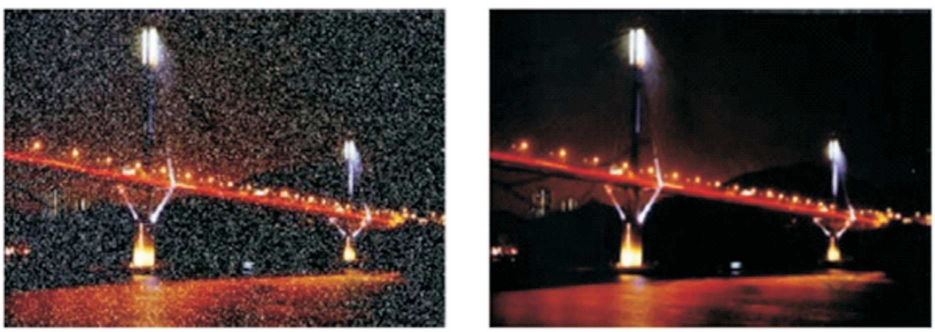
ai,j　n 行　j

m 列　i

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots \\ a_{3,1} & a_{3,3} & a_{3,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix} \end{array}$$

矩陣的應用就非常廣泛，利用數學的矩陣以修復圖像（如下圖甲）及使相片更明亮（如下圖乙）。還有物理的線性變換、幾何光學、向量…等等，都可使用矩陣。

圖甲：利用數學的矩陣以修復圖像



圖乙：利用數學的矩陣使相片更明亮

註：圖甲、乙取自「陳漢夫，2009，數學的應用圖像處理—矩陣世紀，*P*4—*P*7。香港特別行政區政府教育局。」

1-1 自我挑戰

1. 利用公式，求下列各一元二次方程式的解（可使用計算機，非整數時以四捨五入取小數二位）

(1) $x^2+x-3=0$

(2) $3x^2-4x+1=0$

(3) $0.2x^2+\frac{3}{5}x-2=0$

2. 若 0 為一元二次方程式 $2x^2-5mx+(m-2)=0$ 之一根，則 $m=$？

3. 若 $x^2-6x-3k=0$ 的兩根相等，則 $k=$？

4. 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$，$a\neq 0$；當 $b^2-4ac>0$ 時，則此方程式的解為 ________。當 $b^2-4ac=0$時，則此方程式的解為 ________。當 $b^2-4ac<0$，則此方程式的解為 ________。

5. 判別下列哪些一元二次方程式是無解？ 答： ________。

(A) $x^2+x-1=0$ (B) $x(x-6)=-9$

(C) $21x^2=2x+3$ (D) $2x^2+11x+16=0$。

6. 求下列行列式的值

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}$ (2) $\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 6 & 8 \end{vmatrix}$

7. 若 $\begin{vmatrix} 2x & 5 \\ 1 & x \end{vmatrix}=3$，則 $x=$？

8. 若一方程組 $\begin{cases} 3x+ay=2 \\ 6x+2y=1 \end{cases}$ 恰有一組解，則 $a=$？

9. 請利用克拉瑪（*Cramer*）公式解下列方程組。

(1) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ x-2y=-3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x-y=1 \\ x+y=3 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ -2x+3y=2 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 5x-2y=2 \\ 10x-4y=4 \end{cases}$

(5) $\begin{cases} 4x+y=5 \\ 2x-y=3 \end{cases}$

*10.*試判定下列各方程組的幾何意義（所代表兩直線是相交於一點、重合或平行）？

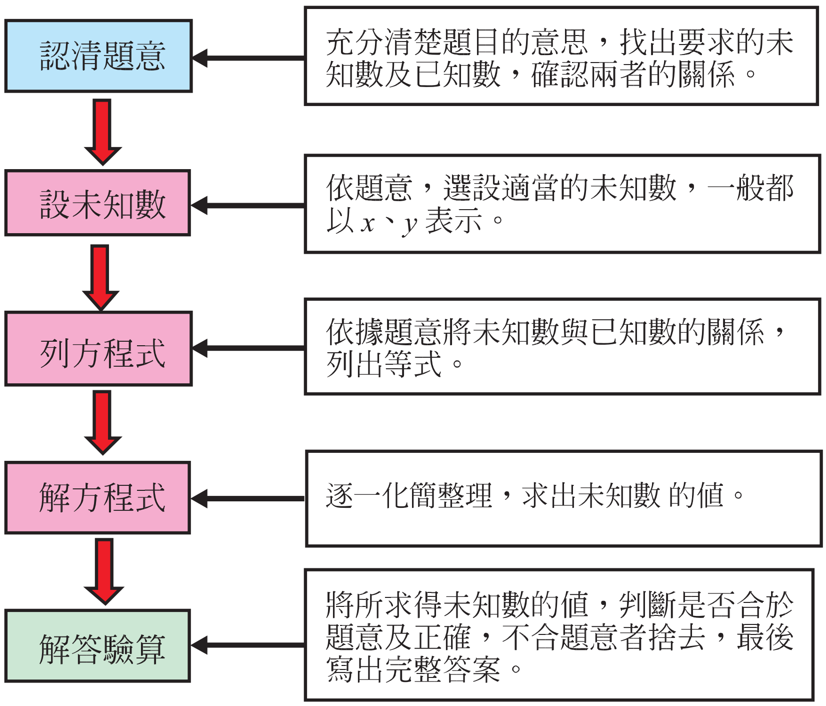
(1) $\begin{cases} 3x+2y-2=0 \\ x-4y=3 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x-2y=2 \\ 4y=4x-4 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 3x+y-2=0 \\ 6x+2y-2=0 \end{cases}$

1－2 方程式的應用實例

學習方程式的目的，除了要培養邏輯思維外，就是要學習解決問題的步驟及得到需求的結果。應用問題是日常生活經常面對的，要多演練才能熟悉它的要領，才能活用。一般應用問題的解題過程如下流程圖：



演示 1

依下列各題指定的文字列式：

1. 三個連續偶整數的和爲 222；若最大數爲 x，則此三數爲 ________，則此三數和的等式爲 ________。
2. 甲的體重比乙的體重重 5 公斤，如果甲體重爲 x 公斤，那麼乙的體重爲 ________ 公斤。若甲、乙兩人的體重共 185 公斤，則等式爲 ________。

解 1. 三個連續偶整數的和為 222，若最大數為 x，則此三數為 $\underline{x-4、x-2、x}$，

則此三數和的等式為 $\underline{(x-4)+(x-2)+x=222}$。

2. 甲的體重比乙的體重重 5 公斤，如果甲體重為 x 公斤，那麼乙的體重為 $\underline{\quad x-5 \quad}$ 公斤。若甲、乙兩人的體重共 185 公斤，則等式為 $\underline{x+(x-5)=185}$。

自我練習 1

依下列各題指定的文字列式：

1. 三個連續整數，最大數為 x ，則最小數為_____________，且此三數的和是__________；若此三數的和為 57，則等式為_____________。
2. 小明的體重比小玉的體重輕 6 公斤，如果小明的體重為 x 公斤，那麼小玉的體重為________公斤，若兩人體重和為 168 公斤則等式為__________。

演示 2

依題意列出方程式：

有一塊長方形的農地，其面積是 600 平方公尺，四周要鐵絲網圍起來，此農地長的一側是河流，不必用鐵絲網去圍，總共使用了 80 公尺的鐵絲網，請問長方形的農地的長、寬各是多少公尺？

解 假設長方形農地長的一側為 x 公尺，則另一側為 $\dfrac{80-x}{2}$ 公尺，

依題意得方程式 $\dfrac{80-x}{2}\times x=600$

自我練習 2

依題意列出方程式：

有一塊長方形土地面積爲 60 平方公尺，用一條 36 公尺的繩子圍成一周，則長方形的長、寬各是多少公尺？

解 假設長方形的長爲 x 公尺，則寬爲 ＿＿＿＿＿＿ 公尺，

依題意得方程式： ＿＿＿＿＿＿ 。

演示 3

依題意列出方程組：

某校忠孝一班男女學生共 50 人，第一次段考全班平均分數爲 80 分；男生平均分數爲 78 分，女生平均分數是 85 分，則男、女生各有多少人？

解 假設男生有 x 人，女生有 y 人，依題意：

因爲男女學生共 50 人，則 $x+y=50$

全班平均分數爲 80 分，

則總分爲 $80\times 50=4000$

男生總分 $78\times x=78x$，

女生總分 $85\times y=85y$，

因爲男生總分加女生總分等於全班總分，所以

$78x+85y=4000$

得方程組：

$$\begin{cases} x+y=50 \\ 78x+85y=400 \end{cases}$$

要訣

1. 男生人數＋女生人數＝全班人數
2. 男生的總分數＋女生的總分數＝全班的總分數

自我練習 3

依題意列出方程組：

甲、乙各有若干元，若乙給甲 10 元，則甲所有錢是乙所有錢的 6 倍；若甲給乙 10 元，則甲所有錢比乙所有錢的 3 倍多 10 元，請問甲、乙原來各有多少錢？

解 設甲原有 x 元，乙原有 y 元，依題意：

乙給甲 10 元，即乙少了 10 元，甲多了 10 元，所以乙的錢變為 ________ 元，甲的錢變為 ______ 元，此時甲所有錢是乙所有錢的 6 倍，得等式__________

又甲給乙 10 元，即甲少了 10 元，乙多了 10 元，則甲的錢變為______ 元，乙的錢變為_____元，此時甲所有錢比乙所有錢的 3 倍多 10 元，得等式__________

得方程組：$\begin{cases} \\ \end{cases}$ ________________________________

演示 4

百貨公司年終大減價，所有貨品一律按原價的七五折優待顧客。阿雅買了一件外套要送給媽媽，阿雅從發票上看到價錢是 2340 元，那麼這件外套的原價為多少錢？

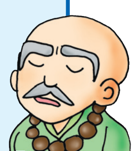
解 設外套的原價是 x 元

依題意得：

$$x \times \frac{75}{100} = 2340$$

要訣

外套原價 $\times \frac{75}{100} = 2340$ 元



$$x = 2340 \div \frac{75}{100}$$

$$x = 2340 \times \frac{100}{75}$$

$$x = 3120$$

答：外套原價是 3120 元。

自我練習 4

農農獲得一張某電影院的電影票折價券 50 元。他到電影院買了一張學生票，學生票是以成人票的八折計價，再用折價券 50 元扣抵計價，農農花了 270 元，請問電影院的成人票一張是多少錢？

演示 5

國華清茶店的椰果奶茶比布丁紅茶貴 5 元，如果賓賓買了 3 杯椰果奶茶、2 杯布丁花茶共花了 150 元，那麼一杯椰果奶茶是多少元？一杯布丁紅茶是多少元？

解　設一杯椰果奶茶是 x 元

所以一杯布丁紅茶是 $x-5$ 元

依題意得：

$$3x + 2(x-5) = 150$$

$$3x + 2x - 10 = 150$$

$$5x = 160$$

$$x = 32$$

$$x - 5 = 32 - 5 = 27$$

答：一杯椰果奶茶是 32 元，一杯布丁紅茶是 27 元。

要訣

3 杯椰果奶茶＋2 杯布丁紅茶 ＝ 150 元

自我練習 5

春風爲了登台灣百岳練習爬山，他沿著相同路徑上山、下山共花了 6 小時，上山每小時可走 2 公里，下山每小時可走 4 公里，則此山路長爲多少公里?

演示 6

用一條長 24 公尺的繩子圍成一面積爲 20 平方公尺的長方形，請問這個長方形的長與寬各是多少公尺？

解 (1)設長方形長爲 x 公尺，則寬爲 $12-x$ 公尺

(2)$x(12-x)=20$

$\Rightarrow 12x-x^2-20=0$

$\Rightarrow x^2-12x+20=0$

(3)利用公式解，因爲 $b^2-4ac=(-12)^2-4\times 1\times 20=64>0$

$\Rightarrow x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\dfrac{-(-12)\pm\sqrt{64}}{2\times 1}$

$\Rightarrow x=2$ 或 10

(4)因爲長>寬，$x=2$ 不合，故 $x=10$

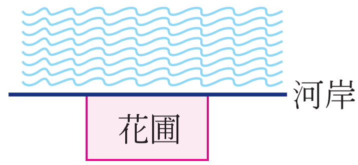
答：長爲 10 公尺，寬爲 2 公尺。

要訣

長$(x)\times$ 寬$(12-x)=$面積

自我練習 6

阿凱用 30 公尺長的籬笆想在河岸旁圍一個長方形的花圃，鄰著河岸的一邊不圍，如下圖，已知花圃的面積為 72 平方公尺，則花圃的短邊是多少公尺？



演示 7

一個售價 120 元的商品，通常一天可以賣 300 個，若此商品每增加 1 元，則每天少賣 3 個，某日該商品共賣 31500 元，問該日此商品一個的售價為多少元？

解 (1)設此商品增加 x 元，則每日少賣 $3x$ 個

(2)$(120+x)(300-3x)=31500$

$\Rightarrow 36000-60x-3x^2=31500$

$\Rightarrow 3x^2+60x-4500=0$

$\Rightarrow x^2+20x-1500=0$

(3)利用公式解，因為

$b^2-4ac=(20)^2-4\times 1\times(-1500)=6400>0$

所以 $x=\dfrac{-20+\sqrt{6400}}{2\times 1}=30$，$x=\dfrac{-20-\sqrt{6400}}{2\times 1}=-50$

(4) $x=-50$不合，故 $x=30$

所以 $120+30=150$(元)

答：該日此商品售價為 150 元。

要訣

要訣：

(120＋增加錢數)×(300－減少個數)＝31500

自我練習 7

電影院門票一張 220 元，每日可賣出 1800 張，如果票價每降低 1 元，則可多賣出 10 張，某日門票收入共 400000 元，請問該日的門票是多少元?

演示 8

錦玉帶 510 元到水果店買 3 台斤紅龍果、4 台斤的梨子還剩下 30 元，這時麗珠帶了 2 台斤的梨子到水果店說買錯了，要換爲紅龍果，老闆說再補 30 元就可換 3 台斤的紅龍果，問紅龍果與梨子各買一台斤共需多少元？

解 設紅龍果每台斤爲 x元，梨子每台爲y元

$$\Rightarrow \begin{cases} 3x+4y=510-30 \\ 2y+30=3x \end{cases}$$

$$\text{即}\begin{cases} 3x+4y=480 \\ -3x+2y=-30 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix} 480 & 4 \\ -30 & 2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{1080}{18}=60$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 480 \\ -3 & -30 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix}}=\frac{1350}{18}=75$$

$$\Rightarrow x+y=60+75=135$$

答：紅龍果與梨子各買一台斤共需 135 元。

要訣

1. 3 台斤紅龍果＋4 台斤梨子
＝（510 − 30）元
2. 2 台斤梨子＋30 元
＝3 台斤的紅龍果

第一章 方程式與應用

自我練習 8

阿仁哥帶 500 元到冷飲店買 5 瓶汽水、7 盒果汁，找回 10 元；後來阿仁哥拿 2 盒果汁，去換 3 瓶汽水，卻不足 15 元，若每瓶汽水價格都相同，每盒果汁價格都相同，請問汽水每瓶多少元？果汁每盒多少元？

演示 9

賣菜店標示小白菜 1 公斤 40 元，香菇 100 公克 20 元。王太太今天預備花 520 元買小白菜和香菇共 5 公斤。請問王太太今天買了多少公斤的小白菜？多少公斤的香菇？

解　假設買小白菜 x 公斤，香菇 y 公斤

香菇 100 公克 20 元，即香菇 1 公斤 200 元

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=5 \\ 40x+200y=520 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 520 & 200 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 40 & 200 \end{vmatrix}}=\frac{480}{160}=3$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 40 & 520 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 40 & 200 \end{vmatrix}}=\frac{320}{160}=2$$

答：王太太買了 3 公斤的小白菜及 2 公斤的香菇。

要訣

1. 買小白菜的重量＋買香菇的重量＝ 5 公斤
2. 買小白菜的錢數＋買香菇的錢數＝ 520 元

自我練習 9

某一遊樂園的門票，成人票每張 40 元，兒童票每張 20 元；某一天共售出門票 1500 張，總票款是 40000 元，請問當天售出的成人票與兒童票各幾張？

演示 10

年終尾牙老闆和員工 10 人一起吃飯，6 人點西餐，5 人點海鮮套餐。已知 2 客西餐的價錢等於 3 客海鮮套餐的價錢，結束時老闆共付款 9800 元（不計服務費），請問西餐及海鮮套餐每客各多少錢？

解 設西餐一客 x 元，海鮮套餐一客 y 元

依題意得方程組為：

$$\begin{cases} 2x = 3y \\ 6x + 5y = 9800 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 6x + 5y = 9800 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 9800 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{29400}{28} = 1050$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 9800 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 6 & 5 \end{vmatrix}} = \frac{19600}{28} = 700$$

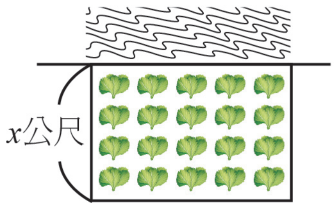
答：設西餐每客 1050 元，海鮮套餐每客 700 元

自我練習 10

中秋節老闆犒賞員工，每人給一份中秋月餅或水果禮盒，有 8 人選中秋月餅禮盒，有 7 人選水果禮盒，老闆自己留一盒中秋月餅。已知 4 份中秋月餅的價錢等於 5 份水果禮盒的價錢，老闆共付款 13140 元，請問中秋月餅及水果禮盒每盒各多少錢？

1-2 自我挑戰

1. 以長 100 公尺的鐵絲網，在河邊圍一長方形的菜園，沿河邊之一側不圍。設菜園之一邊長為 x 公尺，如附圖，若所圍成之菜園面積為 1250 平方公尺，則 $x=$ ________ 。



2. 某食品有每罐售價 15 元及 20 元的罐頭，現混合裝盒，並以每盒 275 元出售。已知每盒售價 20 元的罐頭數為 15 元的 2 倍。問每盒應裝 15 元的罐頭 ____ 罐，20 元的罐頭 ____ 罐。
3. 園遊會時，小剛買 4 份雞塊和 3 枝熱狗共花了 275 元，已知每份雞塊的價錢比熱狗貴 25 元，請問雞塊每份 ________ 錢，熱狗每份 ________ 錢。
4. 媽媽拿 200 元給他的兒子小強，到芳芳冰店買 4 碗愛玉冰和 1 碗紅豆牛奶冰，結果找回 30 元，已知 6 碗愛玉冰和 7 碗紅豆牛奶冰的價錢相等，請問每碗紅豆牛奶冰賣 ________ 元。
5. 東東紅茶店，一杯珍珠奶茶可賺 8 元，一杯仙草甘茶可賺 10 元。端午節那天，珍珠奶茶及仙草甘茶共賣出 135 杯，賺了 1170 元，則當天珍珠奶茶賣出 ________ 杯，仙草甘茶賣出 ________ 杯。
6. 三個連續自然數其平方和為 110，求此三個數的和為 ________ 。
7. 奶茶一杯 35 元，平均每日賣出 240 杯，如果每杯降價 1 元，則每天多賣出 15 杯，若某日共售得 9660 元，且該日賣出的杯數超過 400 杯，則當天共賣出 ________ 杯。
8. 某電影院每張票售價 120 元時，有 200 名觀眾。若票價每便宜 5 元時，就會增加 10 名觀眾。試問：

   (1)若設票價便宜 $5x$（x 為正整數）元時，會增加 ________ 名觀眾。

   (2)此電影院的收入為 24200 元，則每張票售價為 ________ 元。

9.端午節全家出遊，中午在一家餐廳用餐，4 人點了牛排餐，5 人點了西餐，付款時發現 1 份牛排餐的價錢是西餐價錢的 1.5 倍，且共付款 3300 元，則牛排餐每客 ________ 錢及西餐每客 ________ 錢。

10.同學邀約定點旅遊二天一夜，共三十二人參加，第一天上午出發，第二天中午用餐後返回。每人收費 3000 元，租車費爲 20000 元，住宿爲兩人一房，中午及晚餐一起用餐，8 人一桌（每桌價錢均一樣），其餘各自用餐，已知住宿房間一間的費用是用餐一桌的兩倍。付款時飯店老闆將住房費以七五折優惠，所收費用付款後，結餘 4000 元，則住宿的房間一間原價 ________ 錢，用餐一桌 ________ 錢。

本章重點整理

1. 一元二次方程式：只含有一個未知數，且未知數的最高次數為 2 次的方程式。
2. 一元二次方程式的解（根）：將方程式的未知數用一個數代入，使得等號左邊的值和等號右邊的值相等時，稱此數為該一元二次方程式的解（根）。
3. 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的解（公式）為：

   (1) $b^2-4ac>0$ ⇔有二個相異的實根，即$x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$。

   (2) $b^2-4ac=0$ ⇔二個相等實根，即 $x=\dfrac{-b}{2a}$（重根）。

   (3)$b^2-4ac<0$ ⇔無實數解（一般稱為無解）。

   ∗b^2-4ac 為一元二次方程式根的判別式。
4. 二階行列式$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$的值為 $ad-bc$，即 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$。。

   注意：三階以上的行列式，其展開運算法與二階的不同。
5. 設二元一次方程組為$\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$，若要求其解，首先要判斷是否有解，再求其解。判斷是否有解不僅可利用行列式，亦可使用我們學習過得比例驗證，綜合之結論如下：

   (1)當 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ ，則此方程組恰有一解，

   其解為 $x=\dfrac{\Delta_x}{\Delta}$ ，$y=\dfrac{\Delta_y}{\Delta}$，或 $x=\dfrac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$， $y=\dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$

   ⇔此方程組為相容方程組

   ⇔幾何意義為兩直線相交於一點

(2)當 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ 或$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}\neq 0$，

則此方程組無解

⇔此方程組為矛盾方程組

⇔幾何意義為兩直線互相平行

(3)當 $\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$，$\Delta_x=\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}=0$，$\Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}=0$，

則此方程組有無限多組解

⇔此方程組為相依方程組

⇔幾何意義為兩直線重合

6.解應用問題的步驟：

認清題意	充分清楚題目的意思，找出要求的未知數及已知數，確認兩者的關係。
↓ 設未知數	依題意，選設適當的未知數，一般都以 x、y 表示。
↓ 列方程式	依據題意將未知數與已知數的關係，列出等式。
↓ 解方程式	逐一化簡整理，求出未知數的值。
↓ 解答驗算	將所求得未知數的值，判斷是否合於題意及正確，不合題意者捨去，最後寫出完整答案。

附錄：丟番圖的墓誌銘

丟番圖（*Diophantus*）是古希臘亞歷山大後期的重要學者與數學家（生卒約公元 246~330 年），他是代數學的創始人之一，對算術理論有深入研究，在二次方程式有傑出的貢獻，並將希臘人已完成的代數成果加以匯集編目，被後人譽爲「代數學之父」。

希臘人利用其研究代數的成果，在其「墓誌銘」寫道：

「墓中安葬著丟番圖，多麼令人驚訝！

它忠實地記錄了所經歷的道路。

上帝給予的童年占六分之一，

又過十二分之一，兩頰長鬍，

再過七分之一，點燃起結婚的蠟燭。

五年之後天賜貴子，

可憐遲到的寧馨兒，享年僅及其父之半，便進入冰冷的墓；

悲傷只有用數論的研究去彌補，

又過四年，他也走完了人生的旅途。」

以代數學來計算就可以算出丟番圖的歲數，您算得出來嗎？

notes
心得筆記欄

單元 2

比例的應用

2－1 直角三角形三邊比例關係

2－1.1 比與比值

一、比的概念

二、比值與比例式

三、相似三角形比例關係

2－1.2 直角三角形三邊比例關係

一、特別角度的直角三角形邊長的比

二、直角三角形的相互比例關係

2－2 簡易三角測量

單元二 比例的應用

世界各地時常會見到許多知名地標，像是埃及金字塔、巴黎鐵塔、日本富士山、台北 101 大樓…等。如無特殊工具想要實際去丈量這些地標的高度是有困難的，如果透過直角三角形的比例關係，便能找出這些地標的實際高度了。另外像是模型的製作，為什麼能維妙維肖呢？因為掌握了與原物比例，地圖的製作，都是依照比例而得，所以比例在生活中極具重要。

本單元將介紹比與比值，並利用相似的原理討論直角三角形三邊的關係，進而討論簡易的三角測量，最終能廣泛應用於日常生活上。

2－1 直角三角形三邊比例關係

2-1.1 比與比值

一、比的概念

兩個數 a 與 b 的比($b\neq 0$)，記成 $a:b$，讀作 a 比 b，其中「a」稱為比的**前項**，b 稱為比的**後項**。例如：棒球比賽中華隊得 6 分，韓國隊得 5 分，則中華隊與韓國隊的分數比為 6 : 5。

如果一個比的前項與後項都是整數，且它們的最大公因數為 1，我們說這個比為**最簡整數比**。例如 3 : 2 中，3 和 2 都是整數，且 3 和 2 的最大公因數為 1，所以 3 : 2 是最簡整數比。同一個比值可用許多的比予以表示，但是如以最簡整數比就只有一種。而一個比的前項與後項同時乘或除以一個不為 0 的數後，所得的比與原來的比相同，即：

$$a:b=ma:mb=\frac{a}{m}:\frac{b}{m}\ (m\neq 0)$$

便可將比化成最簡整數比。

演示 1

請將下列的比化成最簡整數比。

(1) $24:36$　　(2) $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}$

解 (1) $24:36=\frac{24}{12}:\frac{36}{12}=2:3$

(2) $\frac{2}{3}:\frac{3}{4}=\frac{2}{3}\times 12:\frac{3}{4}\times 12=8:9$

自我練習 1

請將下列的比化成最簡整數比。

(1) $0.75:1.2$　　(2) $\frac{1}{4}:\frac{3}{5}$

二、比值與比例式

(一)比值

日常生活中，經常會遇到許多有關比值的相關名詞，像是升學率、命中率、打擊率、投票率、地圖上的比例尺、錢幣的匯兌比率（匯率）…等，這些名詞（定義如下表）都和比值相關，並常以百分比（%）表示。

升學率：錄取人數與報考人數的比值。
命中率：進球次數與投球次數的比值。
打擊率：安打數與打擊數的比值。
投票率：實際投票人數與有投票權人數的比值。
匯　率：不同幣制的錢幣互換的比值。
地圖上的比例尺：地圖上的長度與實際長度的比值。

我們將比的前項除以比的後項所得的結果稱爲**比值**，即 $a:b$ 的比值爲 $a\div b=\frac{a}{b}\ (b\neq 0)$。例如：$3:2$ 的比值爲$3\div 2=\frac{3}{2}$。由於比值的表示方式爲分數的形式，習慣上我們會將比值化成**最簡分數**。

演示 2

求出下列各比的比值。
(1) $66:72$　(2) $0.15:2.4$

解　(1) $66:72=\frac{66}{72}=\frac{11}{12}$

(2) $0.15:2.4=\frac{0.15}{2.4}=\frac{15}{240}=\frac{1}{16}$

自我練習 2

求出下列各比的比值。
(1) $36:90$　　(2) $5.4:0.45$

演示 3

欣新高商今年報考統測的人數有 500 人，放榜後錄取的人數有 450 人，請問欣新高商的升學率為何?

解　升學率$=\dfrac{\text{錄取人數}}{\text{報考人數}}=\dfrac{450}{500}=\dfrac{90}{100}=90\%$

答：升學率為 90%。

自我練習 3

小英參加全民運動會棒球比賽，擔任第四棒打擊手，他總共上場打擊 8 次，共敲出 4 支安打，1 次被三振出局，3 次被接殺出局，請問小英的安打率是多少?

(二)比例式

若兩個比 $a:b(b\neq 0)$與 $c:d(d\neq 0)$相等時，可將等式寫成 $a:b=c:d$，我們將這樣的等式稱為**比例式**。例如：$3:5=6:10$ 即為一個比例式。因為 $a:b$的比值為$\dfrac{a}{b}$，$c:d$ 的比值為$\dfrac{c}{d}$，當 $a:b=c:d$ 時，可得$\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$。也就是說，當兩個比相等時，它們的比值也會相等，反之亦然。

演示 4

試求出下列各比例式中的 x 值。

(1) $2:5=x:20$　(2) $x:x+3=5:7$

解 (1) $2:5=x:20$

$\Rightarrow \dfrac{2}{5}=\dfrac{x}{20} \Rightarrow 5x=40$

$\Rightarrow x=8$

(2) $x:x+3=5:7$

$\Rightarrow \dfrac{x}{x+3}=\dfrac{5}{7} \Rightarrow 5(x+3)=7x$

$\Rightarrow 5x+15=7x$

$\Rightarrow x=\dfrac{15}{2}$

自我練習 4

試求出下列各比例式中的 y 值。

(1) $12:y=5:3$　　(2) $y-1:4=y+3:6$

演示 5

某高職學校參加職場體驗，搭乘遊覽車的男生與女生人數的比為 3：4，若男生人數為 15 人，則女生人數為多少人？

解 設女生人數有 x 人

則 $3:4=15:x$

$\Rightarrow \dfrac{3}{4}=\dfrac{15}{x} \Rightarrow 3x=60$

$\Rightarrow x=20$

答：女生人數為 20 人。

自我練習 5

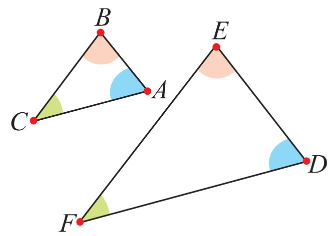
妮妮是 108 學年度新課綱實施的高一新生，他為了繕打專題製作的報告練習打字，妮妮 4 分鐘可打 210 個字，請問打 1575 個字需要多少分鐘？

三、相似三角形比例關係

右圖的兩個三角形中，若三個對應的角度都相同，則稱這兩個三角形為相似三角形，可表示成 $\triangle ABC \sim \triangle DEF$。要特別注意，利用相似符號表示時，必須保持對應角的正確順序，不可隨意排列。相似三角形有以下性質：

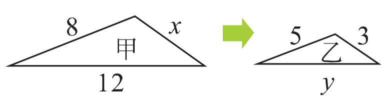
(1)**對應角相等**：$\angle A = \angle D$，$\angle B = \angle E$，$\angle C = \angle F$。

(2)**對應邊成比例**：$\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$。



演示 6

如下圖，將一個邊長為 8、12、x 的三角形，用影印機縮小為邊長是 5、y、3 的三角形，其中 8、12、x 的對應邊分別為 5、y、3，則 $x = ?$ $y = ?$



解 甲、乙為兩相似三角形，則對應邊成比例

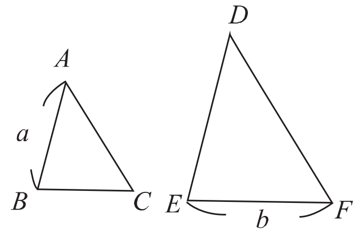
$$\Rightarrow \frac{8}{5} = \frac{x}{3} = \frac{12}{y}$$

$$\Rightarrow 5x = 24，\Rightarrow x = \frac{24}{5}$$

$$\Rightarrow 8y = 60，\Rightarrow y = \frac{15}{2}$$

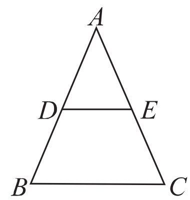
自我練習 6

右圖中，$\triangle ABC \sim \triangle DEF$，若$\overline{AC}=6$，$\overline{BC}=7$，$\overline{DE}=5$，$\overline{DF}=7$，則 $a=$？$b=$？



演示 7

右圖中，$\overline{DE}\,/\!/\,\overline{BC}$，若 $\overline{AD}=6cm$，$\overline{DB}=4cm$，$\overline{DE}=5cm$，則 $\overline{BC}$ 長度爲何?



解

$\angle A$爲ΔADE與ΔABC的共同角，

又$\overline{DE}\,/\!/\,\overline{BC} \Rightarrow \angle ADE=\angle ABC$，

故$\Delta ADE \sim \Delta ABC$

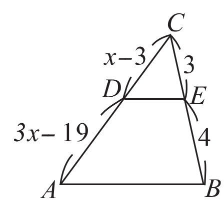
$\Rightarrow \dfrac{\overline{AD}}{\overline{AB}}=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{BC}}$

$\Rightarrow \dfrac{6}{10}=\dfrac{5}{\overline{BC}}$

$\Rightarrow \overline{BC}=\dfrac{25}{3}$

答：$\overline{BC}=\dfrac{25}{3}cm$。

自我練習 7

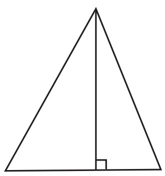


右圖中，若$\overline{DE}\,/\!/\,\overline{AB}$，則 $x=$？

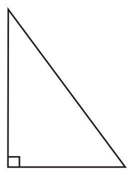
2-1.2 直角三角形三邊比例關係

三角學始創於西元前約150年，為當時天文學家希巴克斯（*Hipparchus* ,190－120 *BC*，出生於希臘）用以作為研究天文的工具，他曾編著了三角函數表，故後人尊稱為“三角學之父”。而後經過許多人一連串的研究改進，到了十六世紀末期，三角學已成為一個內容清晰的數學體系。至今，三角學已廣泛地應用於天文、地理、航海、物理、建築、測量、工程、航空…等，三角學可以說是最具應用性的數學分支之一。

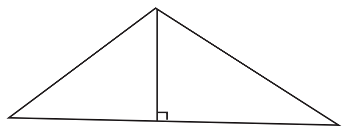
三角形依角度可區分為銳角三角形、直角三角形與鈍角三角形。但是為何只探討直角三角形的比例關係呢？因為所有的三角形都可以由直角三角形所組成，試觀察下列圖形。



(銳角三角形)



(直角三角形)

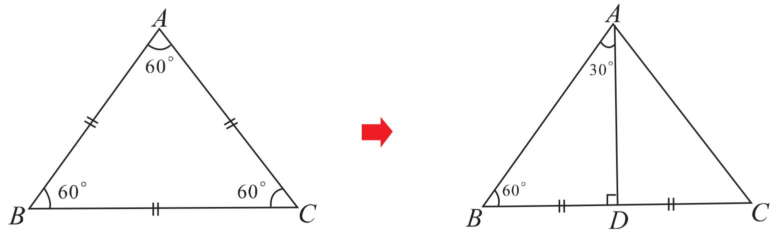


(鈍角三角形)

直角三角形的比例關係，除了特別角度（30°－60°－90°與45°－45°－90°）之三角形的三個邊比例固定外，凡同角度的直角三角形之斜邊、鄰邊和對邊的相互比值也保持著固定。因此可利用這樣的比例關係，來計算未知的邊長，以及相關的應用。而在日常於生活當中，可以解決許多難以實際測量的問題。

一、特別角度的直角三角形邊長的比

(一) 30° −60° −90°直角三角形邊長的比



上圖為一個正三角形 ABC，其中$\angle A=\angle B=\angle C=60°$，$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}$，若自 A 做$\overline{AD}\perp\overline{BC}$，則$\overline{DB}=\overline{DC}$。

在$\triangle ABD$中，$\angle BAD=30°$，$\angle B=60°$，$\angle BDA=90°$，若設正三角形ABC的邊長皆為 2 單位長，即$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}=2$，則$\overline{DB}=\overline{DC}=1$。

因為$\triangle ABD$為直角三角形，依據畢氏定理：

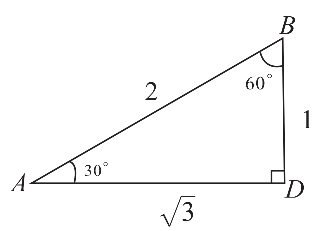
所以 $\overline{AB}^2=\overline{BD}^2+\overline{AD}^2$

$2^2=1^2+\overline{AD}^2$

$\Rightarrow\overline{AD}^2=4-1$

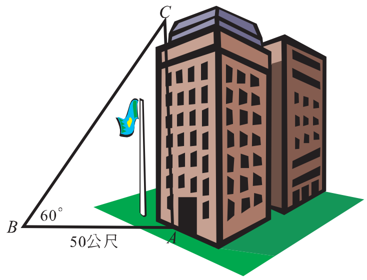
$\Rightarrow\overline{AD}=\sqrt{3}$

由上可知當$\triangle ABD$之三內角為$30°-60°-90°$時，其邊長的比為$1:\sqrt{3}:2$，如下圖所示。



演示 8

翔瑋站在學人會館門口 A 的正前方 50 公尺 B 點處，抬頭向上看學人會館的樓頂 C 點，經測量後$\angle ABC=60°$，則學人會館的高度$\overline{AC}$爲多少公尺？



解　因爲$\angle ABC=60°$所對應的邊爲 $\overline{AC}$；$\angle ACB=30°$所對應的邊爲 $\overline{AB}$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{AC}}{50}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}$

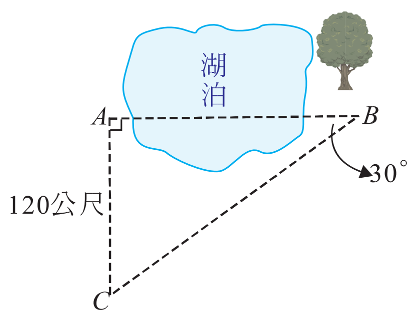
$\Rightarrow \overline{AC}\times 1=50\times\sqrt{3}$

$\Rightarrow \overline{AC}=50\sqrt{3}$

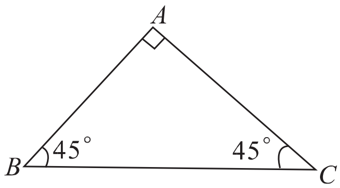
答：學人會館的高度$\overline{AC}$爲 $50\sqrt{3}$公尺

自我練習 8

傑倫想從他家 C 點出發經由 A 點再搭船到依琳家 B 點借一本漫畫書，從 A 到 B 中間有一個湖泊，如下圖所示。若已經知道從 C 到 A 的距離是 120 公尺，$\angle ABC=30°$，則這個湖泊寬度$\overline{AB}$長爲多少公尺？



㈡ 45°−45°−90° 直角三角形邊長的比



上圖為一個等腰直角三角形 ABC，其中 $\angle A=90°$，$\angle B=\angle C=45°$，若設等腰直角三角形 ABC 的兩股長皆為 1 單位長，即 $\overline{AB}=\overline{AC}=1$。

因為 $\triangle ABC$ 為直角三角形，依據畢氏定理：

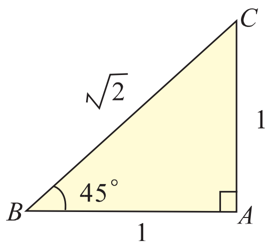
所以 $\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2$

$\Rightarrow \overline{BC}^2=1^2+1^2$

$\Rightarrow \overline{BC}^2=2$

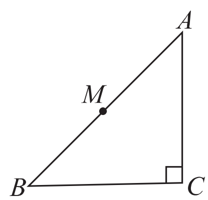
$\Rightarrow \overline{BC}=\sqrt{2}$

由上可知當 $\triangle ABC$ 之三內角為 45°−45°−90° 時，其邊長的比為 $1:1:\sqrt{2}$，如下圖所示。



演示 9

如下圖，等腰直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，M 為 $\overline{AB}$ 之中點。若 $\overline{AM}=\sqrt{2}$ cm，則 $\overline{BC}$ 為多少 cm？



解 M 為 $\overline{AB}$ 之中點

所以 $\overline{BM}=\overline{AM}=\sqrt{2}$

$\triangle ABC$ 為等腰直角三角形，則 $\overline{CM}\perp\overline{AB}$

$\triangle BCM$亦爲等腰直角三角形

依據 $45°-45°-90°$的邊長比，

$\overline{BM}:\overline{BC}=1:\sqrt{2}\Rightarrow\sqrt{2}:\overline{BC}=1:\sqrt{2}\Rightarrow\overline{BC}=\sqrt{2}\times\sqrt{2}=2$

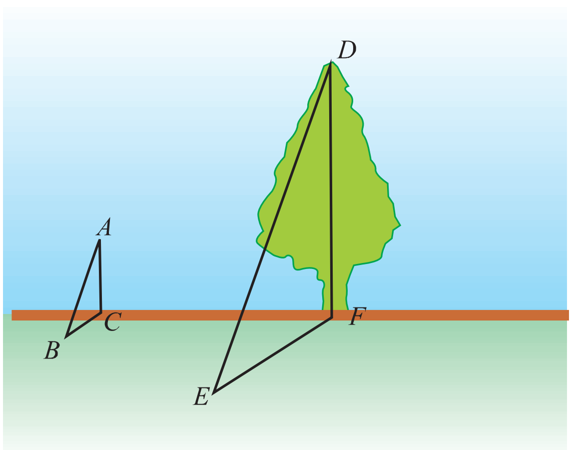
答：$\overline{BC}$的長度爲 2 公分

自我練習 9

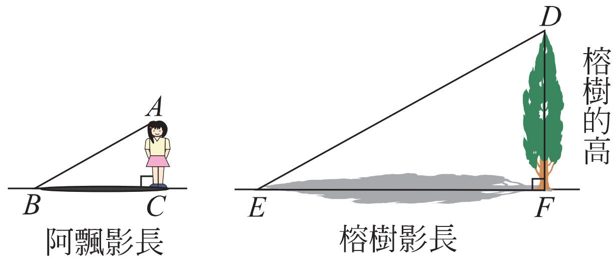
有一小孩放風箏，放出 100 公尺的線，而風箏的仰角爲 45°（假設此時風箏線在空中爲直線），則風箏的高度爲多少公尺？

二、直角三角形的相互比例關係

在一個風和日麗的早晨，小目與阿飄兩兄弟在大安森林公園散步，前面正好有一棵榕樹，阿飄好奇的問小目眼前的那一棵榕樹有多高呢？小目說可以利用影子的長度來解答這個問題。小目讓阿飄站好不要動，在大太陽的照射下，阿飄與榕樹均在地面上產生一條長長的影子，如下圖所示。



若丈量了阿飄的影子長爲 50 公分，榕樹的影子長爲 250 公分，而阿飄的身高爲 120 公分，我們可以將這種關係畫出兩個直角三角形，如下圖所示。



因爲阿飄的身體與榕樹跟地面都是垂直的，所以$\angle C = \angle F = 90°$，而太陽照射的角度是相等的，可以得到$\angle A = \angle D$ 且$\angle B = \angle E$，故$\triangle ABC$與$\triangle DEF$是兩個相似的三角形，因此

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{DF}} \Rightarrow \frac{50}{120} = \frac{250}{\overline{DF}}$$

$$\Rightarrow 50 \times \overline{DF} = 250 \times 120$$

$$\Rightarrow \overline{DF} = \frac{250 \times 120}{50} = 600$$

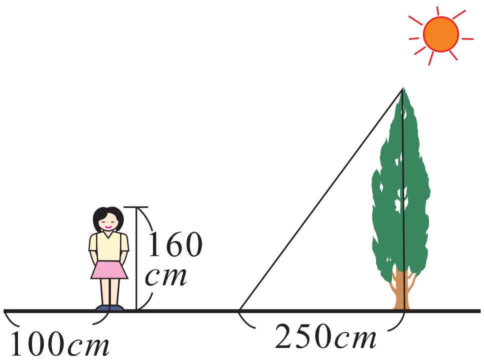
即樹高爲 600 公分

在求榕樹高度的過程中，只要太陽所照射的角度是不變的，則$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{DF}}$的比值就不會改變。阿飄的身高不論爲多少，所求出的榕樹高度都是相同的。求榕樹高度是利用直角三角形中$\frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{DF}}$的比例，而直角三角形三邊中任取二邊的比值，方法共有六種，這六種即構成所謂的六個三角函數（參閱本單元附錄），也就是說在相等角度的條件下，互相對應的兩個三角形，各任取兩個相對應邊所成的比值，都是相等並且是一個定值。

由上述情況亦可說明，當直角三角形其中的一個銳角角度保持不變，所取的直角三角形儘管三邊長改變，但是其任二邊長的比值仍保持不變。而當其中一個銳角大小改變了，其任二邊長的比值必會隨之改變。

演示 10

如下圖，佳欣的身高是 160 公分，在太陽下測得她的影長是 100 公分，又在同一時間測得一棵尤加利樹的影長爲 250 公分，請問這棵尤加利樹的高度是幾公分？



解　假設尤加利樹的高度是 x 公分，則

$$\frac{100}{160}=\frac{250}{x}$$

$\Rightarrow 100\times x=250\times 160$

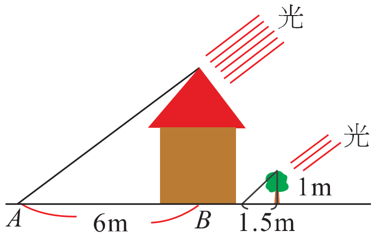
$\Rightarrow x=\dfrac{250\times 160}{100}$

$\Rightarrow x=400$

答：尤加利樹的高度是 400 公分

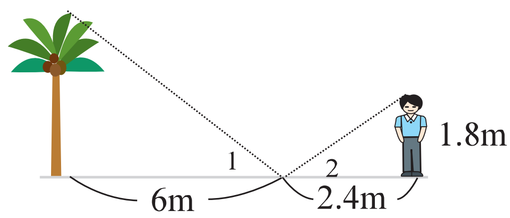
自我練習 10

如下圖，在飛龍牧場的住宿區中有一間小木屋，若量得小木屋在地面上的影長 $\overline{AB}$ 爲 6 公尺，同時旁邊一棵高 1 公尺的小樹影長爲 1.5 公尺，則小木屋的高是幾公尺？



演示 11

籃球隊員姆斯想知道校門口旁一棵椰子樹的高度，他先在樹的東方 6 公尺處放一面廣角鏡，再由鏡子東方後退 2.4 公尺處，透過光的反射可以看到樹頂（如下圖）。則由光的反射定理知道$\angle 1 = \angle 2$，而姆斯從眼睛到腳底的高度為 1.8 公尺，則這棵椰子樹的高度是多少公尺？



解　因為$\angle 1 = \angle 2$

令樹高為 x 公尺

$\Rightarrow \dfrac{x}{6} = \dfrac{2.4}{1.8}$

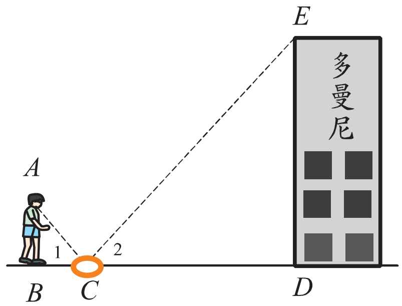
$\Rightarrow 1.8x = 14.4$

$\Rightarrow x = 8$

答：椰子樹的高度是 8 公尺

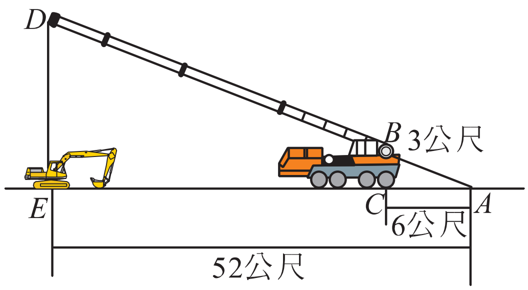
自我練習 11

如下圖，庭庭想知道多曼尼商務大樓的高度，他先在大樓的左方 24 公尺的 C 點平放一面鏡子，再向左方後退到離鏡子 2 公尺的 B 點，透過光的反射看到了大樓樓頂 E 點。根據光的反射定律(光線的入射角度會等於反射角度)知道$\angle 1 = \angle 2$，若庭庭從眼睛到腳底的高度$\overline{AB}$為 1.5 公尺，則大樓高$\overline{DE}$是多少公尺？



演示12

如下圖，已知阿凡達軍事基地有一輛超級吊車，吊桿頭正要吊起一重力機械至精靈樹附近作業，已知超級吊車車身高度為 3 公尺，若沿著吊桿$\overline{BD}$延長線接觸到地面 A 點，則 A 點距離吊車 6 公尺，且距離重力機械 52 公尺，試求吊桿頭距離地面（$\overline{DE}$）有多少公尺？



解 因為△ABC 與△ADE 中，$\angle A$ 是共用的角度

所以$\angle A$所引導出兩個直角三角形的邊長比例相同，

即$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AE}}$

$\Rightarrow \dfrac{3}{6}=\dfrac{\overline{DE}}{52}$

$\Rightarrow 6\times \overline{DE}=3\times 52$

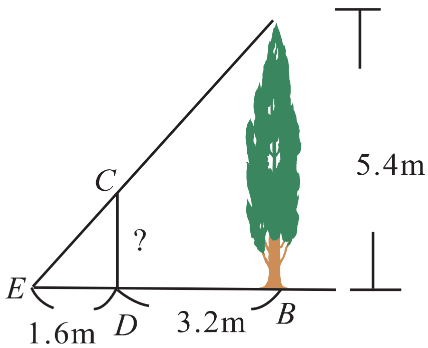
$\Rightarrow \overline{DE}=\dfrac{3\times 52}{6}$

$\Rightarrow \overline{DE}=26$

答：吊桿頭距離地面的高度有 26 公尺

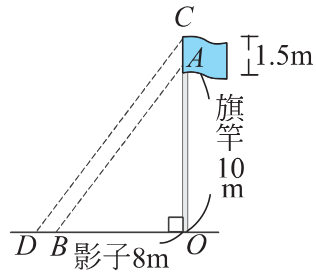
自我練習 12

瑤瑤想知道瑤民家門前一棵樹的高度，她在樹根前方 3.2 公尺處直立一根竹竿（$\overline{CD}$），在直線$\overline{BD}$上找到一個點 E，使得 A、C、E 三點共線，已知$\overline{DE}$長度爲 1.6 公尺並測得樹高爲 5.4 公尺，求竹竿（$\overline{CD}$）的高度爲多少公尺?



演示 13

如下圖，在忠信國中的操場邊，有一根旗竿長 10 公尺，在陽光的照射下，旗竿的影子長爲 8 公尺，旗竿頂插了一枝校旗，旗子超出旗竿頂 1.5 公尺，試求此時旗子的影長爲多少公尺？



解 $\triangle OAB$ 與 $\triangle OCD$ 中，因爲$\overline{AB} \,/\!/\, \overline{CD}$，所以$\angle B = \angle D$（同位角相等）

故這兩個直角三角形的對應邊長比例相等。

即 $\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \dfrac{\overline{OD}}{\overline{OC}}$

$\Rightarrow \dfrac{8}{10} = \dfrac{\overline{OD}}{10+1.5}$

$\Rightarrow 10\times\ \overline{OD} = 8\times\ 11.5 = 92$

$\Rightarrow \overline{OD} = \dfrac{92}{10}$

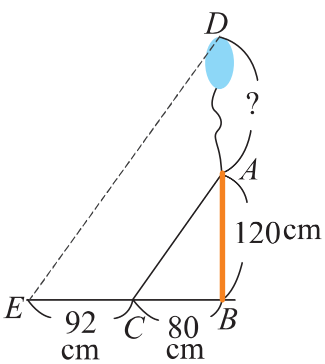
$\Rightarrow \overline{OD} = 9.2$

$\Rightarrow \overline{BD} = 9.2 - 8 = 1.2$

答：旗子的影長為 1.2 公尺

自我練習 13

如圖，小丸子在木棍上綁了一個氣球，已知木棍的長度$\overline{AB}=120$ 公分，在燦爛的陽光照射下，木棍的影長$\overline{BC}=80$ 公分，氣球與繩子部分的影長$\overline{CE}=92$ 公分，則氣球與繩子($\overline{AD}$)的長度為多少公分？



2-1 自我挑戰

1. 試將下列各比化為最簡整數比：

(1) $\frac{3}{7}:\frac{3}{8}=$ ________。 (2) $1.5:1\frac{2}{3}=$ ________。

2. 求出下列各比的比值：

(1) $2:\frac{2}{3}=$ ________。 (2) $1.2:\frac{3}{2}=$ ________。

3. 若$\frac{3}{2}:\frac{4x}{3}=3:10$，則 $x=$ ________。

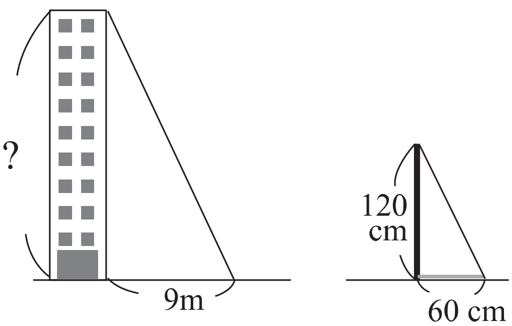
4. 若 $(2a+3):5=(3a+1):7$，則 $a=$ ________。

5. 若甲數的 2 倍等於乙數的 3 倍，則甲數：乙數＝ ________。

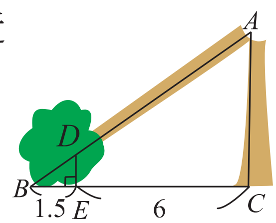
6. 已知 1 台斤＝ 0.6 公斤，若 x 公斤＝ y 台斤，則 $x:y$ 的比值為 ________。

7. 父子二人今年的年齡比為 7：2，三年前的年齡比為 13：3，則父親今年 ________歲，兒子今年 ________歲。

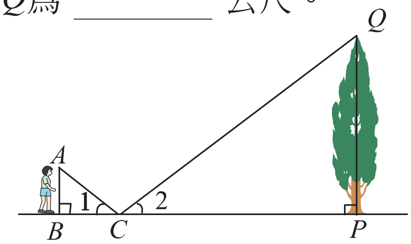
8. 歐八馬想要測量自己所住大樓的高度，他在大樓旁立著一根 120 公分高的棍子，如下圖，當時測量得棍子的影長為 60 公分及大樓的影長為 9 公尺，則大樓的高度為 ________公尺。



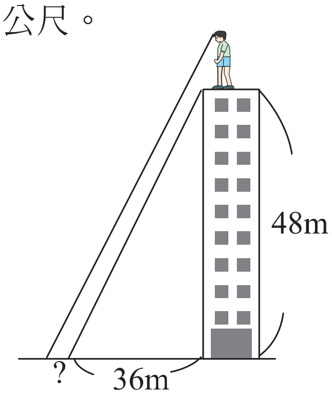
9. 如右圖，強烈颱風莫能比侵襲台灣，在新竹高鐵站附近的一棵路樹被強風吹斷成兩截，金剛想知道被颱風折斷後的樹長$\overline{AC}$，他在離樹根 6 公尺的 E 點直立了一根木桿$\overline{DE}$，並在$\overline{CE}$的延長線上找到一點 B，使得 C、E、B 三點恰好成一直線。已知$\overline{DE}=1$ 公尺，$\overline{BE}=1.5$ 公尺，則樹高$\overline{AC}$是 ________公尺。



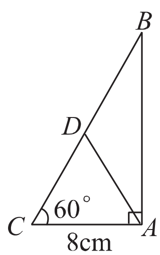
10.<u>浩浩</u>想利用鏡子（放在C點處）來測量樹的高度，如圖所示，若<u>浩浩</u>的眼睛至腳的高度（即$\overline{AB}$長）爲 1.6 公尺，而$\overline{BC}=2$ 公尺，$\overline{CP}=8$ 公尺，且$\angle 1=\angle 2$，則樹高$\overline{PQ}$爲 ________ 公尺。



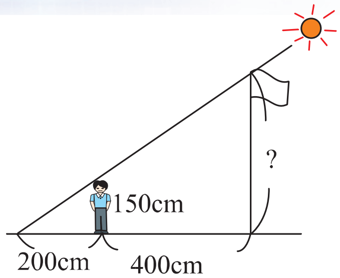
11.如下圖，<u>郭靖</u>站在高 48 公尺的<u>好野人</u>大樓樓頂，在燦爛的陽光照射下，<u>好野人</u>大樓的影長爲 36 公尺，若已知<u>郭靖</u>的身高是 1.6 公尺，則同一時間<u>郭靖</u>的影長是 ________ 公尺。



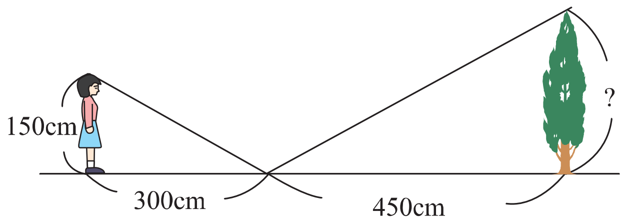
12.如下圖，有一直角$\triangle ABC$。若$\angle BAC=90°$，$\angle C=60°$，$\overline{AC}=8\ cm$，D 是 $\overline{BC}$ 之中點，則 $\overline{BD}$ 爲 ________ cm。



13.<u>郭靖</u>想利用太陽光照射來測量星光大道上一枝旗桿的高度，如圖所示，經測量後得<u>郭靖</u>身高 150 公分，影長 200 公分，而<u>郭靖</u>距離旗桿 400 公分，則旗桿長爲 ________ 公分。

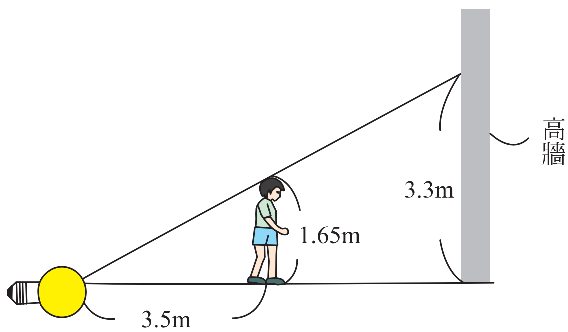


14.如圖，張均雅小朋友想知道樹高，她先在樹的前面 450 公分處平放一面鏡子，再由距離鏡子前 300 公分處向鏡子看去，透過光的反射看到了樹頂，已知張均雅小朋友身高 150 公分，則樹高爲 ________ 公分。



15.已知一電線桿高 3.6 公尺，影長 2.4 公尺，試求在同一時間、同一地點 3 公尺的竹竿，其影長爲 ________ 公尺。

16.瑤民在地上放置一盞燈，照著一面高牆，若瑤民身高 1.65 公尺，當瑤民距離光源處 3.5 公尺時，其牆上的人影高是 3.3 公尺，如圖所示，則這盞燈和這面牆的距離爲 ________ 公尺。

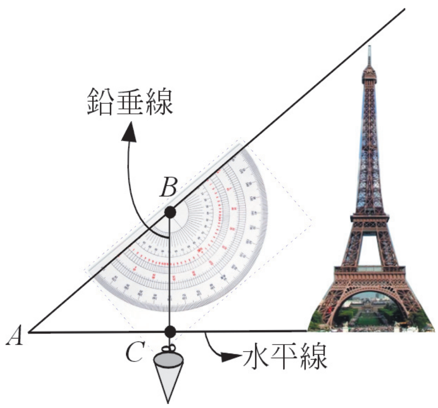


2－2 簡易三角測量

在日常生活中，對於無法實際丈量的建築物高度、物體高度與長度、河流寬度等問題，可藉由直角三角形的比例關係加以解決，稱之爲簡易三角測量。

以下，透過圖形的搭配，可使得介紹測量時所需用到的專業術語更容易被理解：

1. **鉛垂線**：將線的一端固定，將另一端繫上一個重物，使這條線自然下垂，當靜止時，這條線就稱爲鉛垂線，亦可稱之爲鉛直線，如下圖(一)之$\overline{BC}$所示。
2. **水平線**：垂直於鉛垂線的線，稱之爲水平線，如下圖(一)之$\overline{AC}$所示。

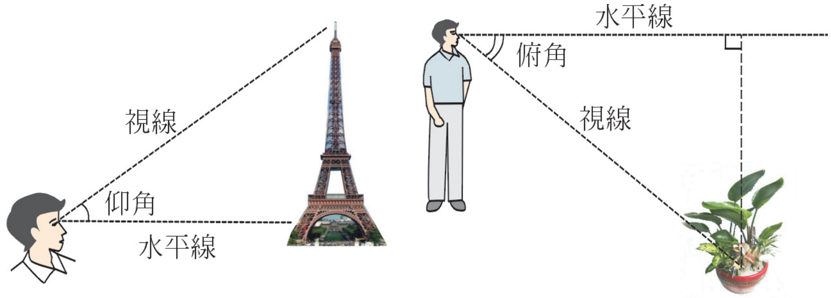


圖(一)

3. **視線**：通過觀測點（即眼睛）與所想要觀測物的連線，稱爲視線，（如下圖(二)所示）。
4. **仰角**：在低處的觀察點仰望高處的目標點，視線與水平線所夾的角度，稱

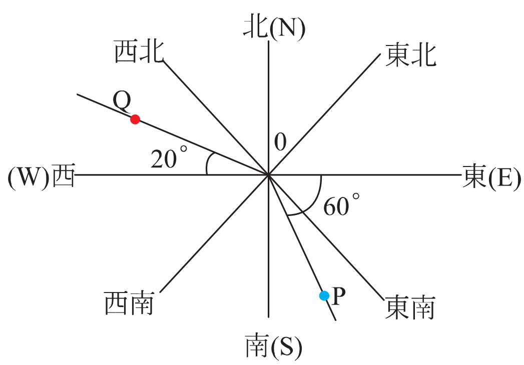
之為仰角，如下圖(二)所示。

5. **俯角**：由高處的觀察點俯視低處的目標點，視線與水平線所夾的角度，稱之為俯角，如下圖(二)所示。



圖(二)

6. **方位**：測量時常用方位表示位置，主要的方位除了東、南、西、北外，還有東北、東南、西南、西北等如下圖(三)所示。在圖(三)中，西南方向為$\angle SOW$的平分線所指的方向；西北方向為$\angle NOW$的平分線所指的方向，其餘依此類推。而表示方向，我們通常會以方位與角度綜合稱呼，例如:$\overline{OP}$所指的方向，稱之為東 60°南（或南 30°東）；$\overline{OQ}$所指的方向，稱之為西 20°北（或北 70°西）。我們經常在電視上聽到氣象播報員報告季風的風向或颱風來襲時的方位，即是使用此種方式命名。

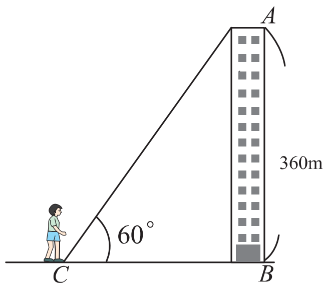


圖(三)

對於解決三角測量的問題，我們可以先依據題意畫出圖形後，再利用直角三角形簡易的比例關係，求出想測量的未知量大小。

演示 1

如下圖，阿嘉在他家的門口，觀測到附近一座摩天大樓頂部的仰角為 60°，已知摩天大樓 $\overline{AB}$ 高 360 公尺，則阿嘉的家與摩天大樓的直線距離為多少公尺？



解 摩天大樓的高度 $\overline{AB}$ 為 360 公尺，阿嘉的家與摩天大樓的直線距離為 $\overline{BC}$，因為 $\angle ACB=60°$ 所對應的邊為 $\overline{AB}$；$\angle ACB=30°$ 所對應的邊為 $\overline{BC}$。

所以 $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}$

$\Rightarrow \dfrac{360}{\overline{BC}}=\dfrac{\sqrt{3}}{1}$

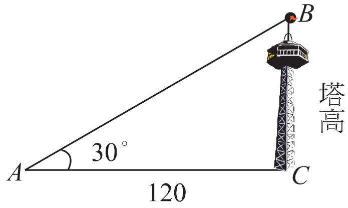
$\Rightarrow \overline{BC}\times\sqrt{3}=1\times 360$

$\Rightarrow \overline{BC}=\dfrac{360}{\sqrt{3}}=\dfrac{360\sqrt{3}}{3}=120\sqrt{3}$

答：阿嘉的家與摩天大樓的直線距離為 $120\sqrt{3}$ 公尺。

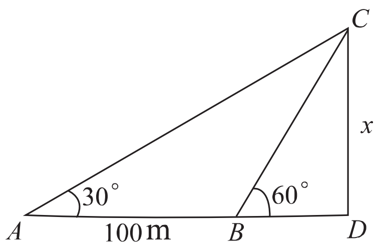
自我練習 1

如下圖，小偉在離晴天塔塔基 120 公尺處（A），測得塔頂的仰角為 30°，則此晴天塔（$\overline{BC}$）的高度為多少公尺？



演示 2

某人從地面上A處，測得一塔頂的仰角為 30°，向此塔前進 100 公尺至B 處，再測得塔頂的仰角為 60°，試求此塔的高度是多少公尺？



解　（解一）：假設塔的高度 $\overline{CD}=x$ 公尺，則在直角△BCD 中

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{BD}}=\frac{\sqrt{3}}{1}\Rightarrow\frac{x}{\overline{BD}}=\frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$\Rightarrow\sqrt{3}\times\ \overline{BD}=x$$

$$\Rightarrow\overline{BD}=\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

而在直角△ACD 中，

$$\frac{\overline{AD}}{\overline{CD}}=\frac{\sqrt{3}}{1}\Rightarrow\frac{100+\frac{1}{\sqrt{3}}x}{x}=\frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$\Rightarrow\sqrt{3}\times\ x=100+\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

$\Rightarrow 3x = 100\sqrt{3} + x$

$\Rightarrow 2x = 100\sqrt{3}$

$\Rightarrow x = 50\sqrt{3}$

解 (解二)：$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB = 30°$，所以$\triangle ABC$ 爲等腰三角形

$\Rightarrow \overline{AB} = \overline{BC} = 100$

又$\dfrac{\overline{CD}}{\overline{BC}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{x}{100} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

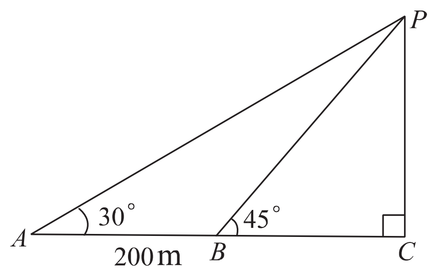
$\Rightarrow 2x = 100\sqrt{3}$

$\Rightarrow x = 50\sqrt{3}$

答：塔的高度是 $50\sqrt{3}$公尺

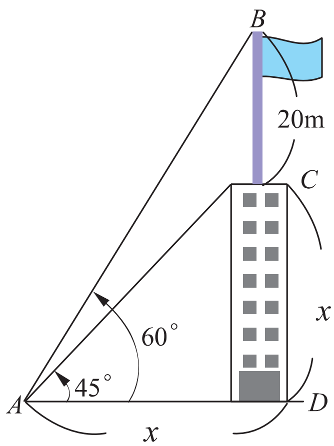
自我練習 2

某人從 A 處測得山峰 P 的仰角爲 $30°$，往山腳水平前進 200 公尺，再測得山峰的仰角爲 $45°$，試求山高($\overline{CP}$)爲多少公尺？



演示 3

如下圖，一建築物上有一旗桿，旗桿長 20 公尺，某人於地面上A處測得建築物頂的仰角爲 45°，旗桿頂端的仰角爲 60°，試求此建築物($\overline{DC}$)的高度爲多少公尺？



解　假設建築物高度$\overline{CD}=x$公尺

在直角△ACD，$\overline{AD}$與$\overline{CD}$均爲 45°的對邊

$$\frac{\overline{CD}}{\overline{AD}}=\frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{\overline{AD}}=\frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow \overline{AD}=x$$

在直角△ABD中，$\overline{BD}$爲 60°的對邊，$\overline{AD}$爲 30°的對邊

$$\frac{\overline{BD}}{\overline{AD}}=\frac{\sqrt{3}}{1}\Rightarrow\frac{20+x}{x}=\frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}x=20+x$$

$$\Rightarrow \sqrt{3}x-x=20$$

$$\Rightarrow (\sqrt{3}-1)x=20$$

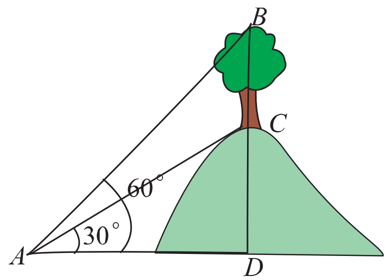
$$\Rightarrow x=\frac{20}{\sqrt{3}-1}$$

$$\Rightarrow x=\frac{20(\sqrt{3}+1)}{2}=10(\sqrt{3}+1)$$

答：此建築物的高度爲$10(\sqrt{3}+1)$公尺。

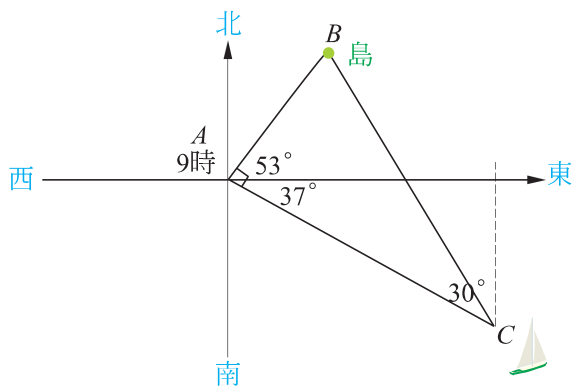
自我練習 3

如下圖，有一棵榕樹生於高 20 公尺的山頂上，自平地上一點（A）測得樹頂的仰角爲 60°，山頂的仰角爲 30°，則此樹高($\overline{BC}$)爲多少公尺？



演示 4

如下圖，一船向東 37°南航行，速度爲 30 浬／時，於上午 9 時測得一島之方向爲東 53°北，到中午 12 時再測，得該島之方向在船北 60°西，試求當時（中午 12 時），船與島的距離是多少浬？



解 由上圖可知$\angle BAC=90^\circ$，$\angle ACB=30^\circ$且$\angle ABC=60^\circ$

在直角$\triangle ABC$中，$\overline{BC}$為 90°的對邊，$\overline{AC}$為 60°的對邊

$\overline{AC}=30\times(12-9)=30\times 3=90$

$\dfrac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

$\Rightarrow\dfrac{\overline{BC}}{90}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

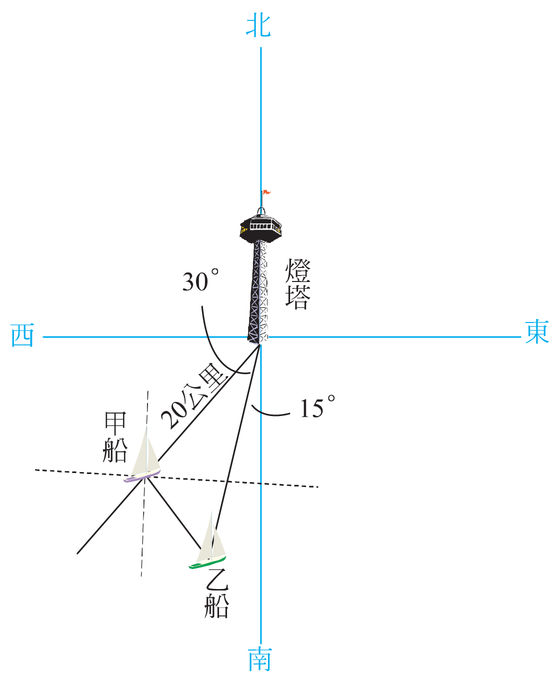
$\Rightarrow\overline{BC}\times\sqrt{3}=2\times 90$

$\Rightarrow\overline{BC}=\dfrac{180}{\sqrt{3}}=\dfrac{180\sqrt{3}}{3}=60\sqrt{3}$

答：船與島的距離是 $60\sqrt{3}$浬。

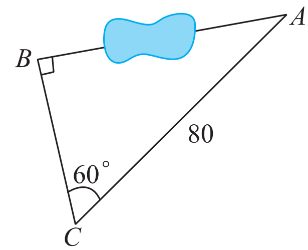
自我練習 4

如下圖，設甲船在燈塔之西南，乙船在燈塔之南 15°西且在甲船之東南，已知甲船距燈塔 20 公里，請問二船相距幾公里？

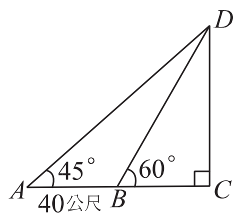


2-2 自我挑戰

1. 愛湖旁邊有 A、B 兩個咖啡店，如圖所示，天心在 C 處測得 $\angle ACB = 60°$，且 $\overline{AB} \perp \overline{BC}$，若 $\overline{AC} = 80$ 公尺，試求 A、B 兩個咖啡店的距離為＿＿＿＿公尺。

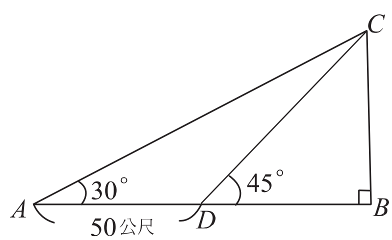


2. 維維從地面上處，測得雷風塔頂的仰角為 $45°$，若向此塔水平前進 40 公尺至 B 處，再測得塔頂的仰角為 $60°$，求此塔的高度 $(\overline{DC})$ 為＿＿＿＿公尺。



3. 明星大樓高 50 公尺，站在明星大樓頂端看對面 168 漢堡大樓，頂端的仰角 $60°$，底端的俯角為 $45°$，求 168 漢堡大樓的高度為＿＿＿＿公尺。

4. 如附圖，金鋼在 A 點測得一旗桿的仰角 $\angle BAC = 30°$，往旗桿方向直線前進 50 公尺到達 D 點，測得仰角 $\angle BDC = 45°$，則旗桿 $\overline{BC}$ 高為＿＿＿＿公尺。



5. 有一棵椰子樹高為 $\overline{PQ}$，小胖從距離樹底 Q 點 10 公尺處的 R 點，測得樹頂 P 點的仰角為 $60°$，求 P 點到 R 點的距離為＿＿＿＿公尺。

本章重點整理

1. **最簡整數比**：一個比的前項與後項都是整數，且它們的最大公因數為 1。

2. $a:b=ma:mb=\frac{a}{m}:\frac{b}{m}$ $(m\neq 0)$。

3. $a:b$ 的比值為 $a\div b=\frac{a}{b}$。

4. **比例式**：兩個比 $a:b$ $(b\neq 0)$ 與 $c:d$ $(d\neq 0)$ 相等時，可將等式寫成 $a:b=c:d$。

5. $a:b=c:d \Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$。

6. 相似三角形的性質：
   (1) 對應角相等：$\angle A=\angle D$，$\angle B=\angle E$，$\angle C=\angle F$。
   (2) 對應邊成比例：$\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}}=\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}=\frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$。

7. **畢氏定理**：斜邊的平方等於兩股的平方和。

8. 三角形三內角為 $30°-60°-90°$ 時，其邊長的比為 $1:\sqrt{3}:2$。

9. 三角形三內角為 $45°-45°-90°$ 時，其邊長的比為 $1:1:\sqrt{2}$。

10. 當一個直角三角形的銳角角度保持不變，所取的直角三角形儘管三邊長改變，但是其任二邊長的比值仍保持不變。

11. 測量時所需用到的專業術語：
    (1)鉛垂線：將線的一端固定，另一端繫上一個重物，使這條線自然下 垂，當靜止時，這條線就稱為鉛垂線，亦可稱之為鉛直線。
    (2)水平線：垂直於鉛垂線的線，稱之為水平線。
    (3)視　線：通過觀測點(即眼睛)與所想要觀測物的連線，稱為視線。
    (4)仰　角：在低處的觀察點仰望高處的目標點，視線與水平線所夾的角度，稱之為仰角。
    (5)俯　角：由高處的觀察點俯看低處的目標點，視線與水平線所夾的角

度，稱之爲俯角。

⑹方　位：測量時常用方位表示位置，主要的方位除了東、南、西、北外，還有東北、東南、西南、西北等，其餘依此類推。而表示方向，我們通常會以方位與角度綜合稱呼。

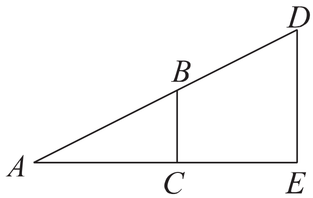
附　錄

※ 銳角三角函數的定義

如圖一所示，直角△ABC~直角△ADE，所以其對應邊成比例，即：

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{AD}},\ \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{AD}},\ \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{DE}}{\overline{AE}}$$

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{DE}},\ \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{\overline{AD}}{\overline{AE}},\ \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}}=\frac{\overline{AE}}{\overline{DE}}$$



(圖一)

由上述六個比值可知，當 $\angle A$ 的角度固定時，不論三角形的三邊長如何變化，這六個比值都不會改變。因此，我們將此六個比值當成 $\angle A$ 的函數，而這些函數則稱為**三角函數**。

直角△ABC 中，$\angle C=90°$，$\overline{AB}$ 為斜邊，$\overline{BC}$ 與 $\overline{AC}$ 分別稱為 $\angle A$ 的對邊與鄰邊(如圖二所示)。假設$\overline{BC}=a$，$\overline{AC}=b$，$\overline{AB}=c$，則我們定義 $\angle A$ 的六個三角函數分別如下：

$\angle A$ 的正弦函數：$\sin A=\dfrac{\text{對邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{a}{c}$

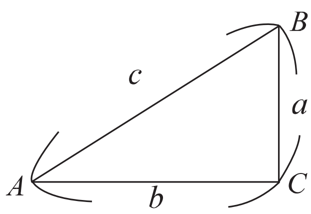
$\angle A$ 的餘弦函數：$\cos A=\dfrac{\text{鄰邊}}{\text{斜邊}}=\dfrac{b}{c}$

$\angle A$ 的正切函數：$\tan A=\dfrac{\text{對邊}}{\text{鄰邊}}=\dfrac{a}{b}$

$\angle A$ 的餘切函數：$\cot A=\dfrac{\text{鄰邊}}{\text{對邊}}=\dfrac{b}{a}$

$\angle A$ 的正割函數：$\sec A=\dfrac{\text{斜邊}}{\text{鄰邊}}=\dfrac{c}{b}$

$\angle A$ 的餘割函數：$\csc A=\dfrac{\text{斜邊}}{\text{對邊}}=\dfrac{c}{a}$



(圖二)

單元 3

統計圖表

■ 3－1　資料蒐集整理及統計量分析

3 － 1.1 資料蒐集

3 － 1.2 資料整理

3 － 1.3 統計量分析

■ 3－2　統計圖表的認識與製作

3 － 2.1 認識統計圖

3 － 2.2 統計圖表的製作

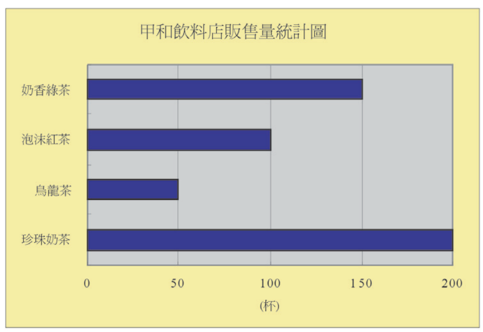
單元三　統計圖表

　　統計為實用的社會科學，其主要乃是藉由分析有限的資料，來獲得想知道的資訊，各行各業已普遍將統計作為預估趨勢的工具。所謂的大數據分析，就是利用大量資料的統計數據做為研究論述的依據或決策的參考，如政府利用農漁牧普查或工商普查做為未來施政方針的參考。還有以抽樣方式預估其結果的，如商業界依市場銷售調查來預測未來的趨勢；選舉期間，候選人依據民調來調整競選策略；還有生態學家運用隨機抽樣方法來估計稀有動物的數量等等。

　　本單元將先介紹統計方法的蒐集資料、資料整理及統計量分析，期能對統計工作有初步的認識，然後將說明常見統計圖表的意義與利用電腦軟體來製作統計圖。

3－1　資料蒐集整理及統計量分析

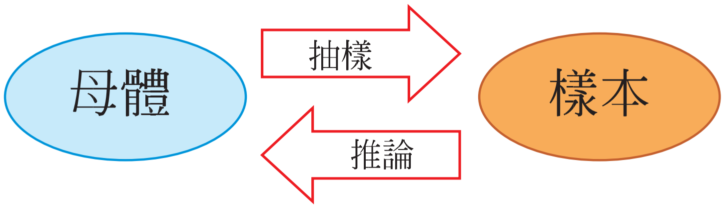
　　在日常生活中，我們會依照需求去蒐集資料，例如：各種選舉的民意調查，政府單位對各行業的薪資調查，學術研究的調查…等，初步所蒐集的原始資料經常是雜亂的，為使資料能彰顯其意涵，容易了解，必須透過整理、分析等步驟，才能使雜亂的資料成為有意義的資訊。



　　統計學上常用的兩個名詞為：

母體：為研究對象的全部，其大小視研究者的需要而定。

樣本：由母體中抽出的部分個體之集合，稱為母體的樣本。



3-1.1 資料蒐集

蒐集資料常見的方法有人員訪談、電話訪問、發填問卷、實驗及觀察法等，在考量主客觀因素後，選用最適合的方法實施。就資料蒐集範圍大小，一般區分為普查與抽樣兩種，分述如下：

普查：針對研究母體的所有成員，來進行蒐集（如政府的人口普查、工商業及農漁牧業普查）。母體愈大所須的成本自然愈多。

抽樣：從研究母體中，就部分成員進行資料蒐集（如選舉時期的民意調查或學校的作業抽查）。樣本資料的分析結果與實際母體真實情形可能會有落差。

為了讓樣本分析結果能更接近母體的實際情況，抽樣的方式就是關鍵了。以下介紹幾種常用的抽樣方式：

1. **簡單隨機抽樣**：在母體中每個成員被抽出機率均等的情況下，隨機抽出樣本。
2. **系統抽樣**：將母體中的所有成員按某項特性排序，再每隔一定時間或距離抽取一調查樣本。
3. **分層抽樣**：將母體按某種標準分成若干個不重疊的類別，每類別就稱為「層」，然後在每一層中隨機抽取所需的樣本數。

4. **部落抽樣**：將母體依某種特性分成若干組，每一組稱爲一個部落，每一部落視爲母體的縮影；從這些部落中，隨機抽取若干部落進行抽樣調查或普查。

演示 1

某班有 32 位學生，編號 1 至 32 號，若要抽 8 位同學參加大隊接力，從 2 號開始每隔 4 號就抽出一位學生，爲何種抽樣方法？

解 因爲同學按編號完成後，再依一定距離（每隔 4 號）抽取一位，此抽樣方法爲系統抽樣。

自我練習 1

某校一年級總共有 12 個班級，均爲常態分班，今隨機取一個班級進行英語聽力測驗，爲何種抽樣方法？

3-1.2 資料整理

若原始資料可以做分類，則將原始資料依照類別，將其歸類，並計算其每一類別的次數所得的表格，叫做**次數分配表**。其功能可使資料簡單化、組織化，讓我們更容易看出整個資料分佈的狀況。製作步驟爲：

㈠分類別：分析原始資料中的各種類別。

㈡劃　記：1 的劃記 /，2 的劃記 //，3 的劃記 ///，4 的劃記 ////，
5 的劃記 卌， 以上是國際通用的符號。
也可以用中文的”正”字來劃記。

㈢計算次數：以阿拉伯數字記載各類別的次數。

演示 2

旭日高中一年 A 班 30 名同學生日月份記錄表如下：

座號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
月份	11	6	5	2	10	7	2	1	8	11	9	3	5	9	11
座號	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
月份	8	4	3	8	11	10	3	7	5	4	11	10	12	9	5

請製作該班的次數分配表。

解 類別：1~12 月份

生日月份	劃 記	次 數	生日月份	劃 記	次 數
1	/	1	7	//	2
2	//	2	8	///	3
3	///	3	9	///	3
4	//	2	10	///	3
5	////	4	11	卌	5
6	/	1	12	/	1

自我練習 2

莊園高中二年 B 班舉辦同樂會，店家有 1 號到 6 號套餐，下表為該班同學所點的餐點：

座號	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
套餐號碼	5	1	4	2	6	3	4	3	6	3	4	4	6	3	4
座號	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
套餐號碼	1	6	2	1	4	2	6	1	5	2	6	5	5	6	3

請製作該班的次數分配表。

套　　餐	劃　　記	次　　數
1 號餐		
2 號餐		
3 號餐		
4 號餐		
5 號餐		
6 號餐		

若原始資料沒有類別之分，只有大小上的差異，則製作次數分配表就以分組為主。其製作步驟如下：

(1)**求全距**：將資料中最大數減最小數。

(2)**定組數**：將資料由小而大分成 7~15 組最適當。

(3)**定組距**：每一組的範圍稱為該組的組距。若以相等的組距分組，則

$$組距=\frac{全距}{組數}。$$

(4)**定組限**：每一組的上下界稱為該組的組限。數值較小的組限稱為下限，數值較大的組限稱為上限。規定**每組範圍包含其下限，但不包含其上限**。例如：30~40 公斤，30 公斤為下限，40 公斤為上限。包含 30 公斤，但不包含 40 公斤。

(5)**劃　記**：1 的劃記 /，2 的劃記 //，3 的劃記 ///，4 的劃記 ////，5 的劃記 ~~////~~，以上是國際通用的符號。

也可以用中文的「正」字來劃記。

(6)**計算次數**：以阿拉伯數字記載各組的次數。

演示 3

丁丁漢堡準備推出外送服務，於是先進行一個月試賣期，以決定外送服務的最遠距離，以下是這個月每天的外送距離記錄（單位：公里）：

1.24	2.54	3.87	9.40	1.56	5.2	7.85	2.0	4.32	8.54
6.47	0.80	2.88	3.56	3.02	4.7	5.48	6.9	5.66	4.2
1.8	2.4	3.21	4.24	5.5	2.5	4.80	3.4	3.58	1.34

請將此 30 天依距離分成 10 組，做出其次數分配表，以幫助老闆知道外送的情形。

解 ㈠全距：最遠為 9.4，最短為 0.8，所以全距 $=9.4-0.8=8.6$

㈡組數：分 10 組。

㈢組距：因為 $\frac{8.6}{10}=0.86$，所以取組距為 1。

㈣組限：因為最小一組的下界 ≤ 0.8，所以我們定最小一組的下限為 0，上限為 1。因此可得到各組的組限為：
0~1，1~2，2~3，3~4，4~5，5~6，6~7，7~8，8~9，9~10。

次數分配表為：

距離（公里）	劃 記	天 數	距離（公里）	劃 記	天 數
0～1	/	1	5～6	////	4
1～2	////	4	6～7	//	2
2～3	𝍸	5	7～8	/	1
3～4	𝍸 /	6	8～9	/	1
4～5	𝍸	5	9～10	/	1

第三章 統計圖表

自我練習 3

根據調查，受訪者每天聽音樂的平均時間爲 46 分鐘，以下是隨機選取 30 個人調查其聽音樂的時間。(單位:分鐘)

88.3	4.3	4.6	7.0	9.2
0.0	99.2	34.9	81.7	0.0
85.4	0.0	17.5	45.0	53.3
29.1	28.8	0.0	98.9	64.5
4.4	67.9	94.2	7.6	56.6
52.9	145.6	70.4	65.1	63.6

請將此 30 筆資料依時間分成 10 組，做出其次數分配表。

時間（分鐘）	劃 記	人數	時間（分鐘）	劃 記	人數

3-1.3 統計量分析

某中學甲乙兩班參加數學競試的結果，甲班平均 70 分，最高分 90 分，最低分 40 分；乙班平均 68 分，最高分 80 分，最低 55 分。要如何對這兩班的數學能力下評論呢？最常聽到的說法是：甲班平均分數較高，整體程度較乙班好；但乙班高低分差距小，數學能力較整齊。

我們常用具有代表值的統計量來描述資料，如上述中的平均分數及高低分差距。而統計量分成兩類，一類是表達集中趨勢的統計量，例如：平均

數，另一類爲表達離散趨勢的統計量，例如：全距。以下將介紹集中趨勢的兩個統計量－算術平均數及中位數，以及離散趨勢的兩個統計量－全距及四分位距。

(一)算術平均數

算術平均數可以顯示整個資料的集中趨勢，應注意各個資料的比重是否相等，還應注意資料不可過於分散，因爲算術平均數容易受極端資料的影響。

(1)未分組資料(即未製成次數分配表)之求法：

將各數值直接加起來求總和，再除以個數即得算術平均數。公式爲：

設 n 個資料爲 $x_1,x_2,x_3,\cdots x_n$，則其算術平均數 $\overline{X}=\dfrac{x_1+x_2+x_2+\cdots+x_n}{n}$ 。

演示 4

龐龐是加油站洗車員，以下是他這週工作內容的統計表：

日期	星期一	星期二	星期三	星期四	星期五
洗車數量	30	18	36	25	16

求龐龐這週洗車數量的算術平均數是多少？

解 $\overline{X}=\dfrac{30+18+36+25+16}{5}=25$

答：25 台。

自我練習 4

大同為了準備入伍，提前自我訓練，他 10 天內做伏地挺身的次數為 10、10、12、14、15、16、19、21、25、30，求大同做伏地挺身的算術平均數。

演示 5

瑩劭在夜市擺地攤，一週中有一天休息不賺錢，一天賺 1500 元，兩天賺 3000 元，三天賺 4500 元，則這週平均每天賺幾元？

解

$$\overline{X}=\frac{1\times 0+1\times 1500+2\times 3000+3\times 4500}{7}=3000$$

答：3000 元

自我練習 5

某便利商店工讀生的薪資為日班薪水 800 元，夜班薪水 1000 元，大夜班薪水 1200 元，小麥一週內做了兩天日班，三天夜班，兩天大夜班，請問他這週平均每天的薪水是多少錢？

(2)已分組資料(即已製成次數分配表)之求法：

先求出各組的組中點，將組中點乘以該組次數，再把所有分組之和加起來即得總和，將總和除以整體次數即得算術平均數。

公式：

$$\overline{X}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots x_kf_k}{n}，其中\ n=f_1+f_2+\cdots f_k$$

演示 6

健康果園出產的蘋果重量分組資料如下表，求其算術平均數。

重量	280g~320g	340g~360g	440g~460g	480g~520g
個數	50	60	50	40

解

重量	280g~320g	340g~360g	440g~460g	480g~520g
組中點	300g	350g	450g	500g
個數	50	60	50	40

$$\overline{X}=\frac{300\times 50+350\times 60+450\times 50+500\times 40}{200}=392.5(g)$$

答：392.5(g)。

自我練習 6

以下是全班 40 位同學手機價格次數分配表:（單位:元）

價格	0~1000	1000~5000	5000~10000	10000~20000
人數	20	10	5	5

求其算術平均數。

(二)中位數

　　將一群數據資料由小到大排列，位置在最中間的數據稱爲中位數。如果**資料的個數是奇數，則中間那個數據就是這群資料的中位數；如果資料的個數是偶數，則中間那兩個數據的算術平均數就是這群資料的中位數。**

從中位數的定義可知，資料的數據中有一半小於中位數，一半大於中位數。若資料中有極端值的情形出現，用中位數作爲資料的代表值要比用算術平均數更好，因爲中位數不會受極端值的影響；如果研究目的就是爲了反應中間水平，當然也應該用中位數。

演示 7

試求下列各數據資料的中位數:

(1) 5，2，7，5，2，6，3。

(2) 18，12，6，－2，0，35。

解 (1) 由小到大排列爲 2，2，3，5，5，6，7 共 7 個，

其中位數爲最中間的第 4 個，所以中位數爲 5。

(2) 由小到大排列爲－2，0，6，12，18，35 共 6 個，

其中位數爲最中間的兩數平均，所以中位數爲 $\dfrac{6+12}{2}=9$。

答：(1) 5　(2) 9　。

自我練習 7

金鼎修車廠一週維修汽車的數量爲: 30，23，14，21，19，50，18。求其一週的算術平均數和中位數。

(三)全距

一群數值資料中最大數與最小數的差稱為全距。最大和最小這兩個值可以顯示出整組資料的範圍。全距的優點在簡單易求，僅能粗略的說明資料分布的範圍。

一組資料最大值與最小值的差距，將n個數值資料由小到大排列：x_1，x_2，⋯，x_n，則全距$=x_n-x_1$

演示 8

五位學生的成績如下：57, 68, 23, 23, 84，求學生成績的全距。

解 將成績由小到大排列，23, 23, 57, 68, 74

全距 $R=74-23=51$（分）

自我練習 8

擲一顆骰子 10 次，出現點數結果為 1, 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5, 5, 5 點，則出現點數的全距為何。

(四)四分位距

一群由小排到大的資料中，位於整體資料中央的數叫作中位數，中位數本身不算，在中位數前之資料中的中位數叫作第 1 四分位數，在中位數後之資料中的中位數叫作第 3 四分位數，第 3 四分位數與第 1 四分位數的差叫做**四分位距**。 四分位距表示在所有資料的中間半數的變動範圍，當存在有特

別大或特別小的資料時，四分位距比全距更適合用來描述整組資料的分散程度。

演示 9

試求下列各數值資料的中位數與四分位距爲何？

(1) 有 7 筆數值資料爲 3, 5, 12, 12, 13, 15, 18

(2) 有 8 筆數值資料爲 3, 5, 12, 12, 13, 15, 18, 20

解 (1) 參照中位數求法得全部資料的中位數爲第二個 12，前半部中位數爲 5 (第 1 四分位數)，後半部中位數爲 15 (第 3 四分位數)，故四分位距爲 $15 - 5 = 10$。

(2) 全部資料的中位數爲 12.5，前半部中位數爲 8.5 (第 1 四分位數)，後半部中位數爲 16.5 (第 3 四分位數)，故四分位距爲 $16.5 - 8.5 = 8$。

自我練習 9

有 8 筆數值資料爲 19, 11, 12, 28, 26, 23, 24, 18，求四分位距。

3-1 自我挑戰

1. 汽車雜誌選了五家不同廠牌的車子做比較，所選的車子在等級配備上都接近，今天隨機抽取 100 人，調查他們的第一選擇爲何，下表爲調查的結果：

汽車廠牌	售 價	保固年限	平均耗油量(公里/公升)	人 數
A	70 萬	3 年	13.2	4
B	58.8 萬	3 年	17.3	23
C	62 萬	5 年	18.8	39
D	59.5 萬	4 年	17.1	22
E	61 萬	3 年	16.5	12

(1)由上表我們可以推測整個市場那一家廠牌會賣的最好呢？

(2)那兩家的銷售量是相近的？

(3) A 廠牌在售價和平均耗油量上都沒有特別的優勢，我們推測選擇的原因爲「品牌愛好」，請問這樣的推測是否合理呢？

2. 某班學生共有 50 人，第二次段考的數學成績如下：

70 64 32 85 77 52 69 86 51 98 69 19 75 27 96 62
71 78 47 79 66 74 61 73 84 68 78 67 72 46 84 49
72 83 29 79 94 75 86 76 88 72 57 92 58 70 69 38
65 87

請將成績分成 10 組，組距為 10 分：

(1) 製作次數分配表

(2) 50~60 分這組有多少人？

(3)不及格的有多少人？

(4) 40~89 分有多少人？

(5) 40 分以上有多少人？

(6)數學成績第 10 名在那一組內？

分數範圍	劃 記	人 數	分數範圍	劃 記	人 數
0~10			50~60		
10~20			60~70		
20~30			70~80		
30~40			80~90		
40~50			90~100		

3. 根據行政院勞動部的薪資調查報告，服務業受僱員工經常薪資(105 年 7 月)的平均月薪是 $NT\$41,198$。以下是布隆企業 10 位員工的月薪(單位：百元)。

43.9 42.0 42.3 38.9 39.9
45.9 43.9 48.8 46.8 32.6

(1)請問這 10 位員工薪資的算術平均數多少？

(2)請問這 10 位員工薪資的中位數多少？

(3)他們的薪資有符合調查所報告的平均值嗎？試作比較。

4.在行駛哩程數與汽油消耗量測試中，有 5 輛汽車分別在市區與郊區中行駛 200 公里。以下資料爲每公升行駛的里程數。

市區：	15.2	14.4	13.2	15.3	16.8
郊區：	19.4	20.6	18.3	21.1	18.7

(1)市區與郊區的算術平均數差了多少里程數？

(2)市區與郊區的中位數差了多少里程數？

5.學校舉辦數學會考，林老師任教的三個班級人數與平均成績如下表: 試求林老師任教班級成績的總平均。(四捨五入至小數點後第二位)

班級	電機一甲	電子一乙	機械一甲
人數	40	35	40
平均成績	70	80	72

6.下表爲 100 名學生每天上網時間的次數分配表，試求這 100 名學生上網時間的算術平均數。

時間（小時）	人數
0~1	6
1~2	10
2~3	36
3~4	32
4~5	16

7.下列六數由小而大依序爲 3、4、a、8、8、13，若此六數之算術平均數恰好與中位數相等，則 a 之值爲何？

8. 佳奇公司有 40 位員工，員工薪資的次數分配表如下：

薪資(元)	27000	32000	34500	36000	42000	68000
人數	4	8	12	9	5	2

請問佳奇公司員工薪資的中位數爲多少？

9. 設一組資料爲 6,11,2,5,13,18,15,8,19，則全距及四分位距爲何？

10. 設有 40 位學生的成績均相異，其第 1 四分位數爲 60 分，第 3 四分位數 80 分，請問這 40 位學生成績及格者有幾位？

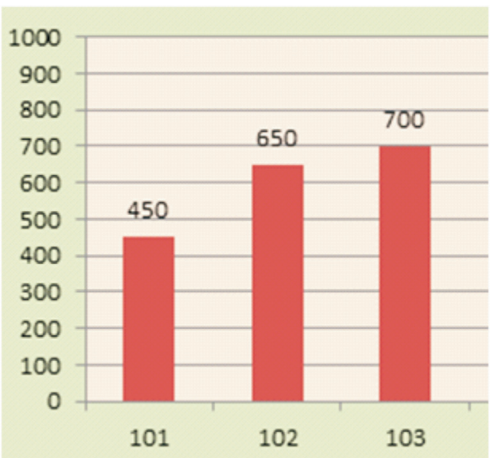
3－2 統計圖表的認識與製作

3-2.1 認識統計圖

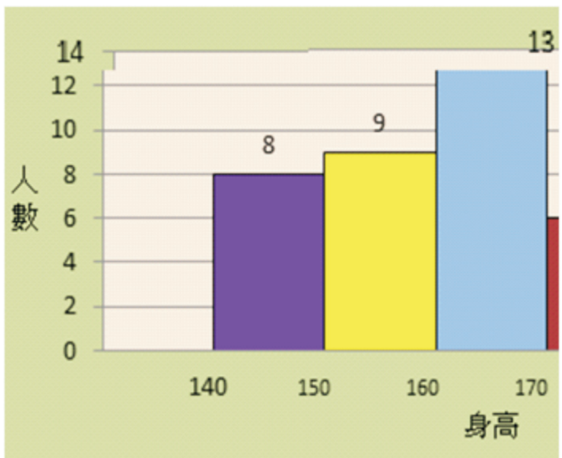
統計圖是呈現統計資料的方式，容易使人對其所表示的現象獲得清楚的概念，本節要瞭解圖表所呈現的資訊，能報讀圖表的資料以應用於生活上，並學習簡易的圖表製作。常用的統計圖類型有長條圖(橫式者稱爲橫條圖)、圓形圖、折線圖、直方圖。製作統計圖表時，可依需要擇取適合的類型。

長條圖：適用於比較各組資料的多寡(資料之間沒有連帶關係)。
圓形圖：適用於群組之間進行比較(將資料顯示爲整體所佔的百分比)。
折線圖：除可比較資料的多寡外，還可顯示資料變化的趨勢。
直方圖：適用於比較各組資料的多寡(資料之間有連帶關係)。

※長條圖與直方圖的差異是長條圖的柱狀圖之間有間隔，而直方圖的柱狀圖之間沒有間隔（如下圖）。

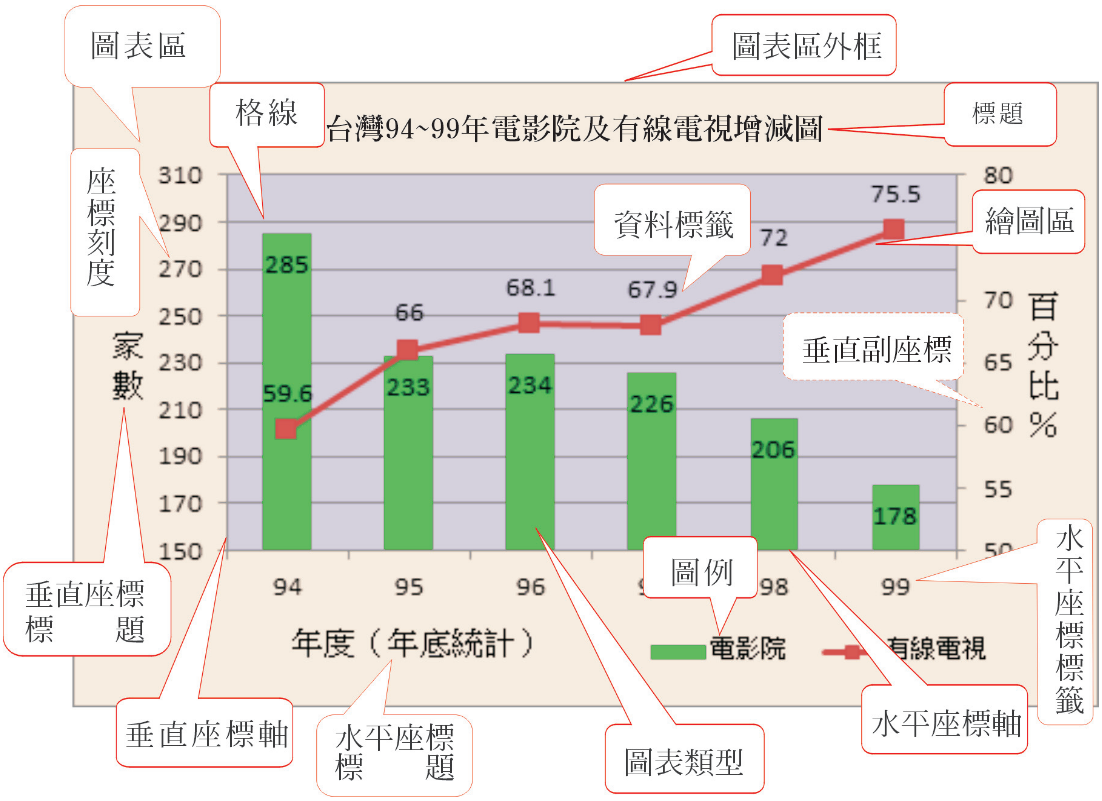


長條圖



直方圖

為使製作統計圖時能更得心應手，首先來認識主要的相關名詞。

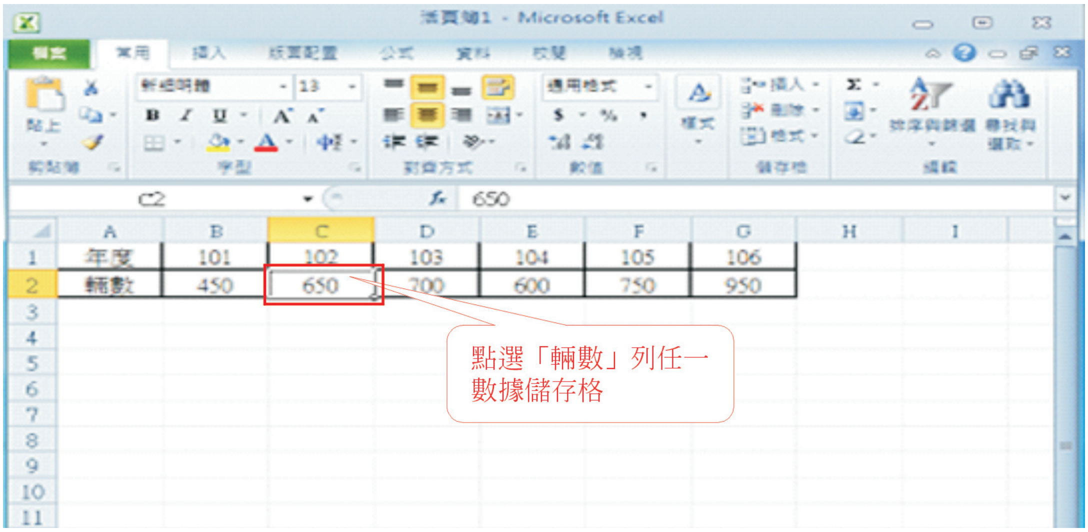


3-2.2 統計圖表的製作

當我們把資料整理完成如下表，接著要製作統計圖表。由於使用電腦軟體製作，既快速又美觀。我們使用 *Excel* 2010 軟體介紹長條圖的製作過程。以下為 *M* 牌汽車近六年在台灣銷售量表：

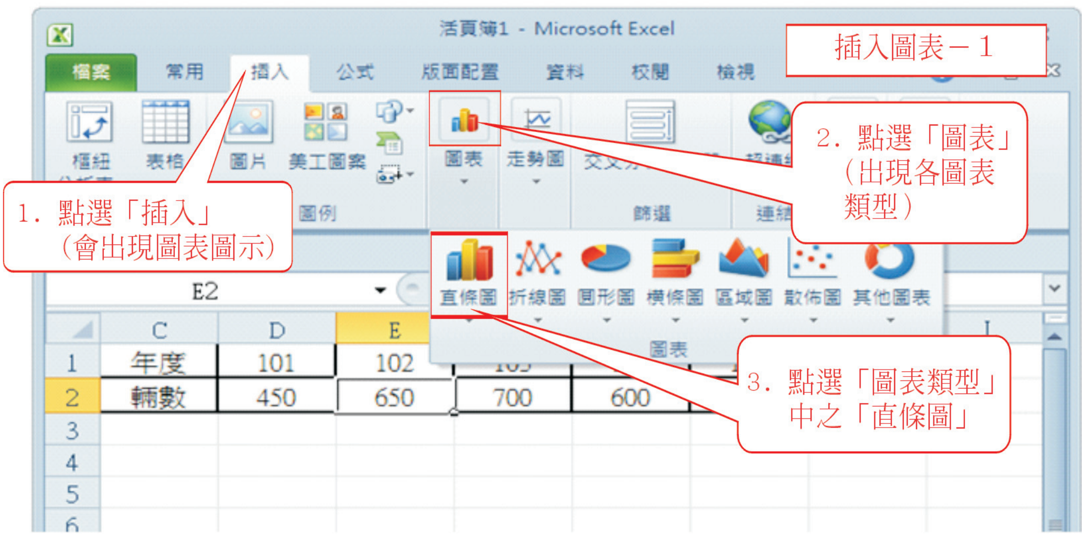
年度	101	102	103	104	105	106
輛數	450	650	700	600	750	950

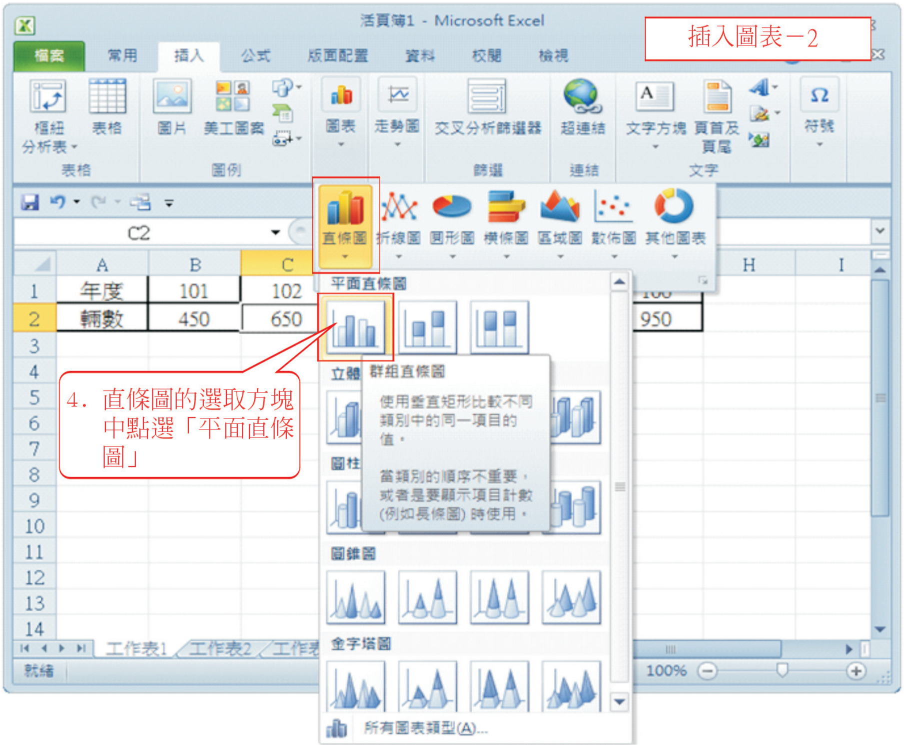
㈠建置統計資料表（將上列資料表建置或複製 *excel*）

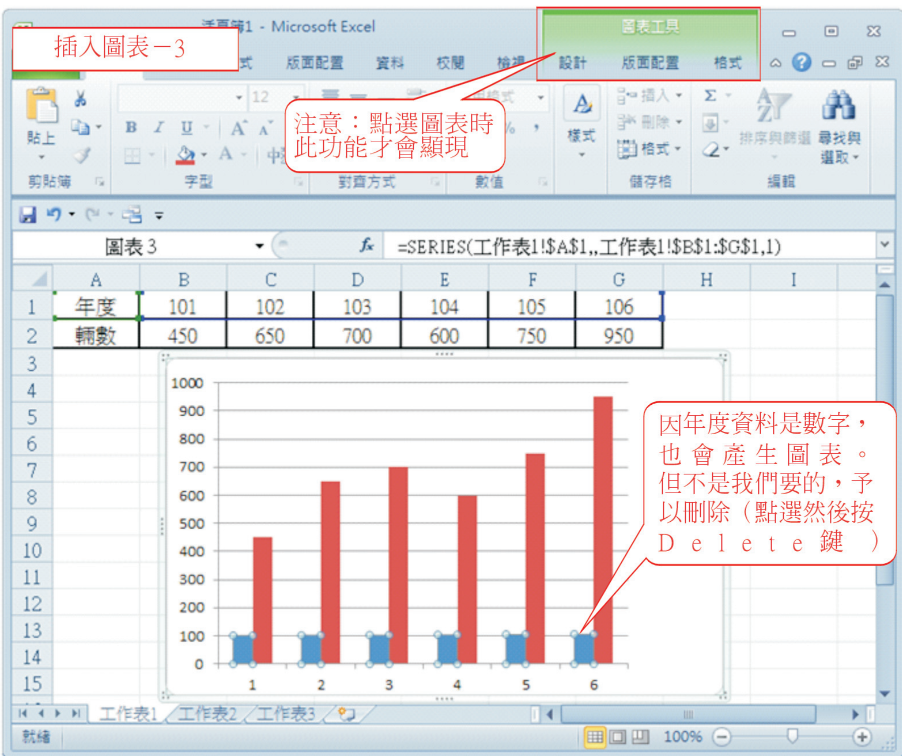


㈡選擇圖表類型

本單元爲了截圖說明，速算表之畫面不是「放大」的全螢幕畫面。當「放大」時各種工具列易顯現，操作時將更便捷。如全螢幕時，按「插入」功能，圖表類型（直條圖…區域圖…等）會在功能表區顯示，此時「插入圖表－1」中的步驟 2 可省略。所以使用速算表，應注意其變化。

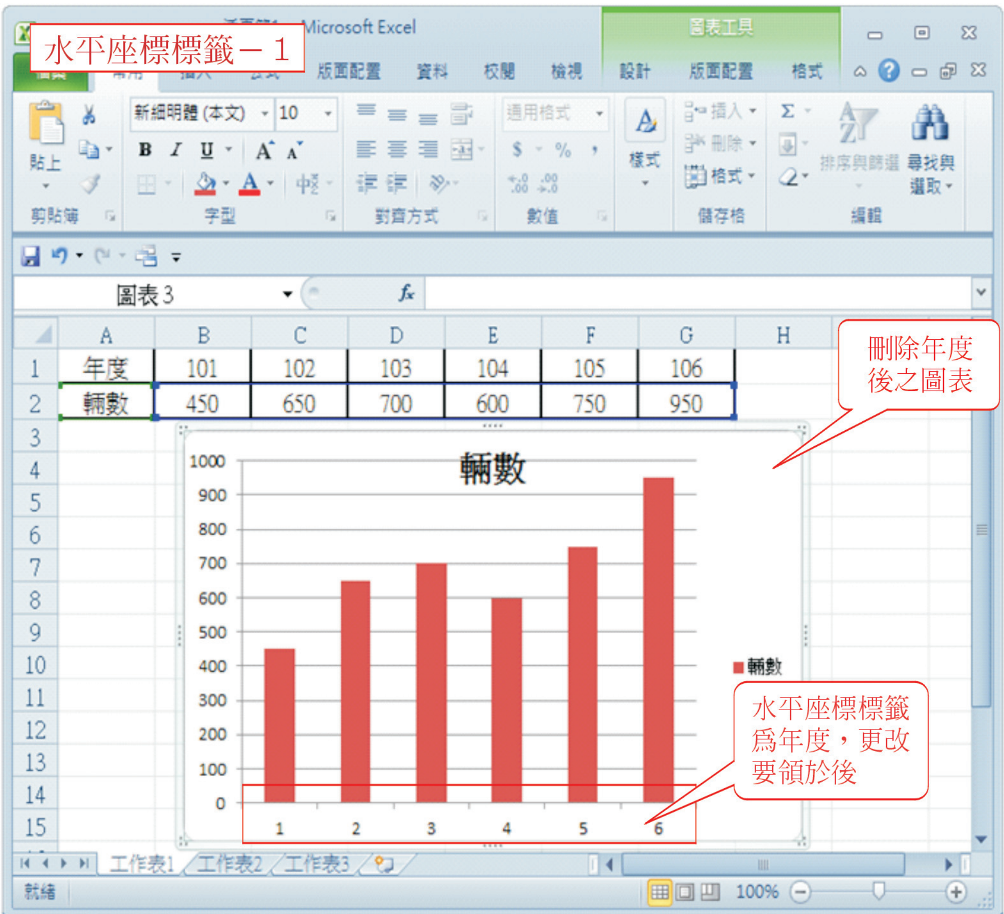


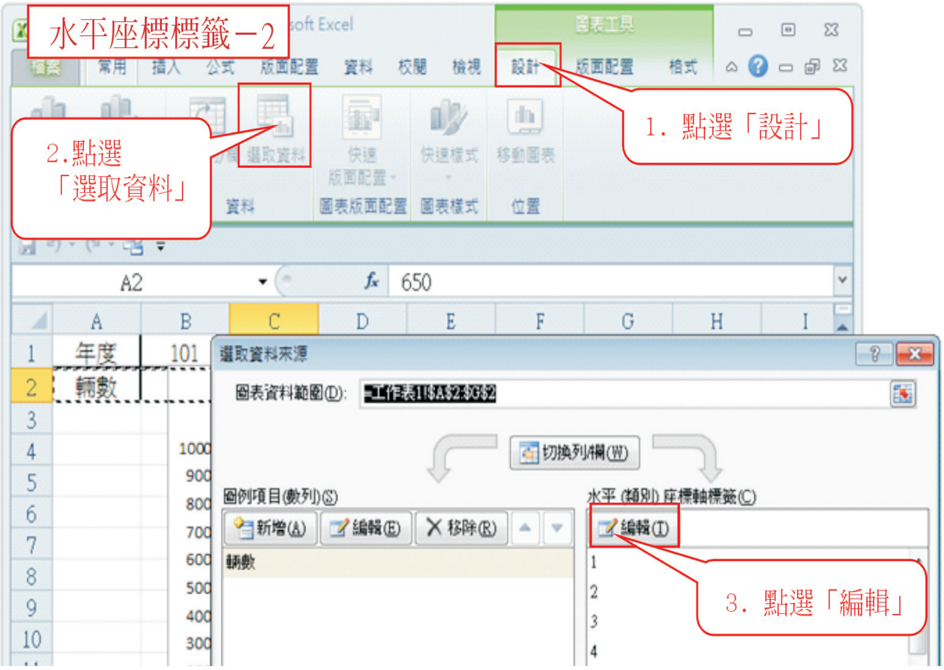

插入圖表－2
活頁簿1 - Microsoft Excel
檔案 常用 插入 公式 版面配置 資料 校閱 檢視
直條圖 折線圖 圓形圖 橫條圖 區域圖 散佈圖 其他圖表
平面直條圖
群組直條圖
使用垂直矩形比較不同類別中的同一項目的值。
當類別的順序不重要，或者是要顯示項目計數(例如長條圖)時使用。
圓錐圖
金字塔圖
所有圖表類型(A)...
4. 直條圖的選取方塊中點選「平面直條圖」
年度 101 102
輛數 450 650 950


插入圖表－3
活頁簿1 - Microsoft Excel
圖表工具
設計 版面配置 格式
注意：點選圖表時此功能才會顯現
圖表 3
=SERIES(工作表1!$A$1,,工作表1!$B$1:$G$1,1)
年度 101 102 103 104 105 106
輛數 450 650 700 600 750 950
因年度資料是數字，也會產生圖表。但不是我們要的，予以刪除（點選然後按Delete鍵）

㈢修正圖表

圖表的修正包含圖表類型更換或刪除、標題增刪、座標軸標題及標籤、座標刻度的變換、格線增刪、資料標籤增刪、圖例增刪及位置的改變、圖表區的格式、繪圖區的格式、圖表版面的配置及樣式的改變、圖表外框的格式等的修正，修正順序可依個別需要處理。




水平座標標籤－2
1. 點選「設計」
2.點選
「選取資料」
3. 點選「編輯」


水平座標標籤－3
4. 選取「年度」
的資料
5.點「確定」，
結束選取資料

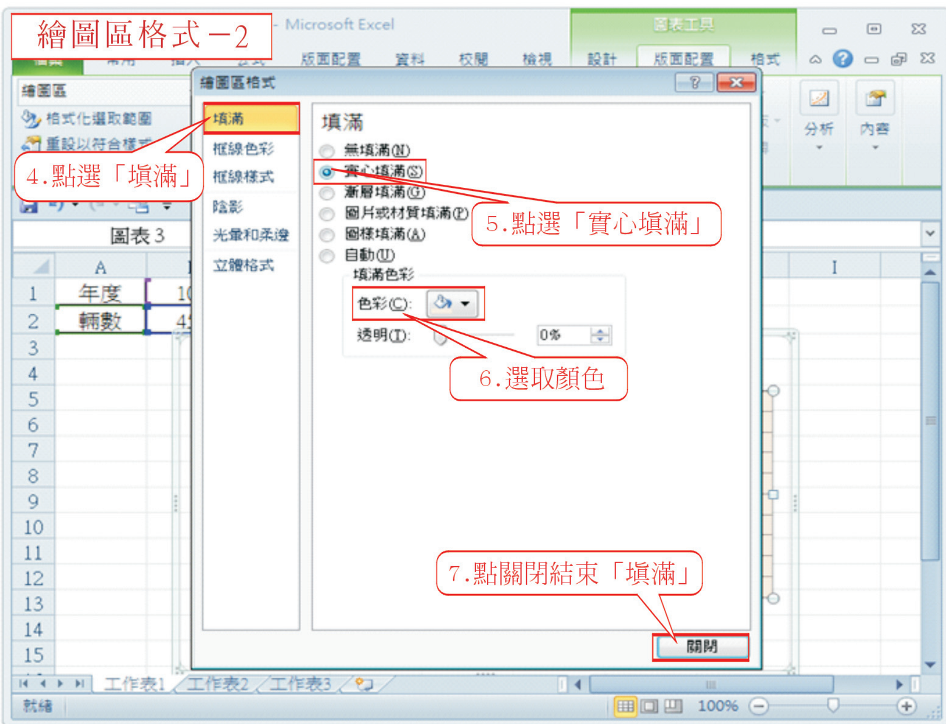

圖例的配置
1. 點選「版面配置」
2. 點選圖例
（會出現選單）
3. 點選「關閉圖例」
水平座標標籤已改變

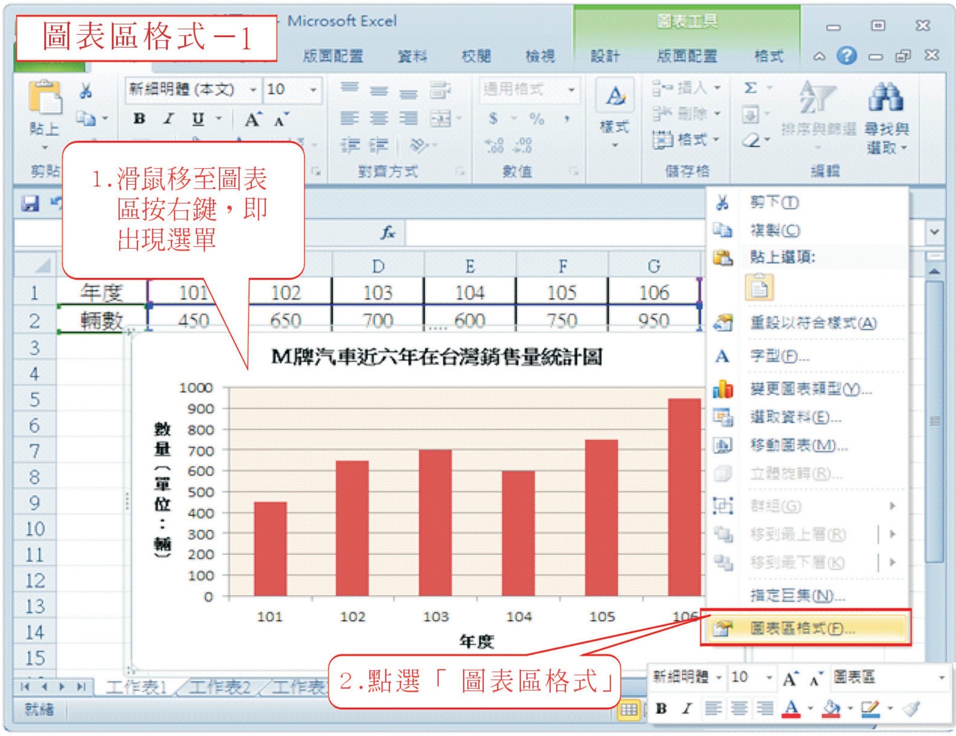

圖表標題配置
1. 點選「版面配置」
2.點選「圖表標題」
3.點選「圖表上方」，
然後輸入標題名稱


垂直座標軸標題配置
Microsoft Excel
1. 點選「版面配置」
2. 點選「座標軸標題」
3. 點選「主垂直座標軸標題」
4. 點選「垂直標題」然後輸入標題名稱
主水平軸標題(H)
主垂直軸標題(V)
無
不要顯示座標軸標題
旋轉的標題
顯示旋轉的座標軸標題，並調整圖表的大小
垂直標題
以垂直文字顯示座標軸標題，並調整圖表的大小
水平標題
年度
輛數
M牌汽車近六年在台灣銷售量統計圖
工作表1
工作表2
工作表3
就緒
100%

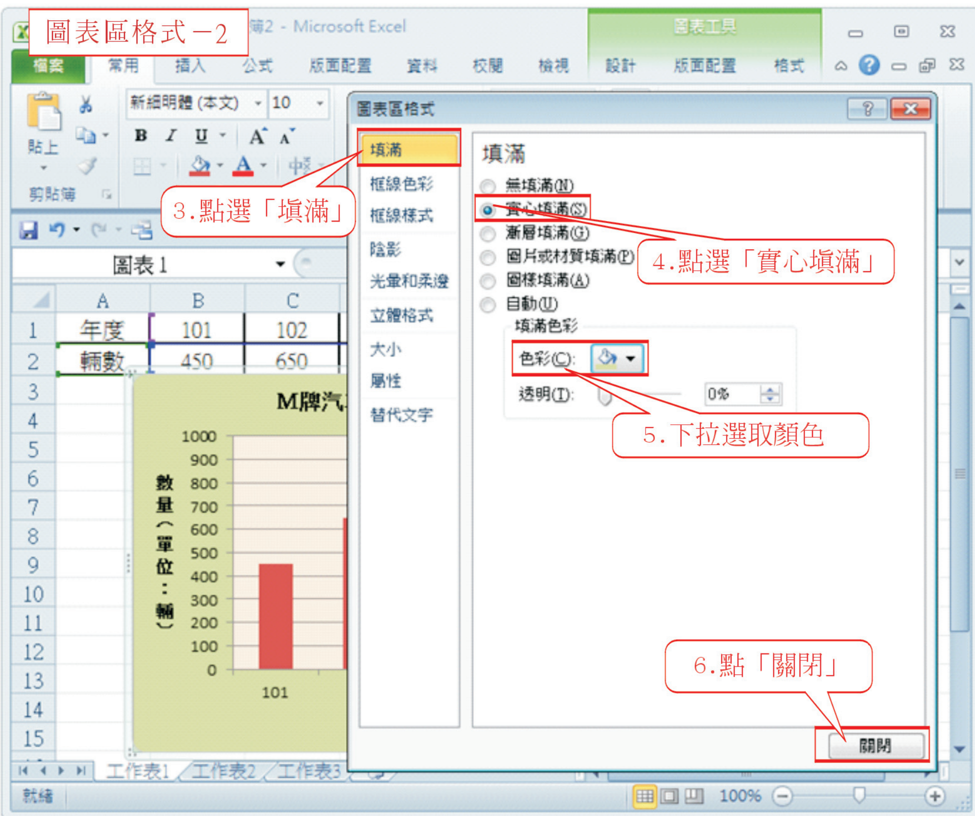

水平座標軸標題配置
Microsoft Excel
1. 點選「版面配置」
2. 點選「座標軸標題」
3. 點選「主水平座標軸標題」
4. 點選「座標軸下方的標題」，然後輸入標題名稱
主水平軸標題(H)
主垂直軸標題(V)
無
不要顯示座標軸標題
座標軸下方的標題
在水平軸的下方顯示標題，並調整圖表的大小
年度
輛數
M牌汽車近六年在台灣銷售量統計圖
數量（單位：輛）
工作表1
工作表2
工作表3
就緒
100%


繪圖區格式－1
1.點選「版面配置」
2.點選「繪圖區」
3. 點選「其他繪圖區選項」
M牌汽車近六年在台灣銷售量統計圖
數量（單位：輛）
年度


繪圖區格式－2
4.點選「填滿」
5.點選「實心填滿」
6.選取顏色
7.點關閉結束「填滿」

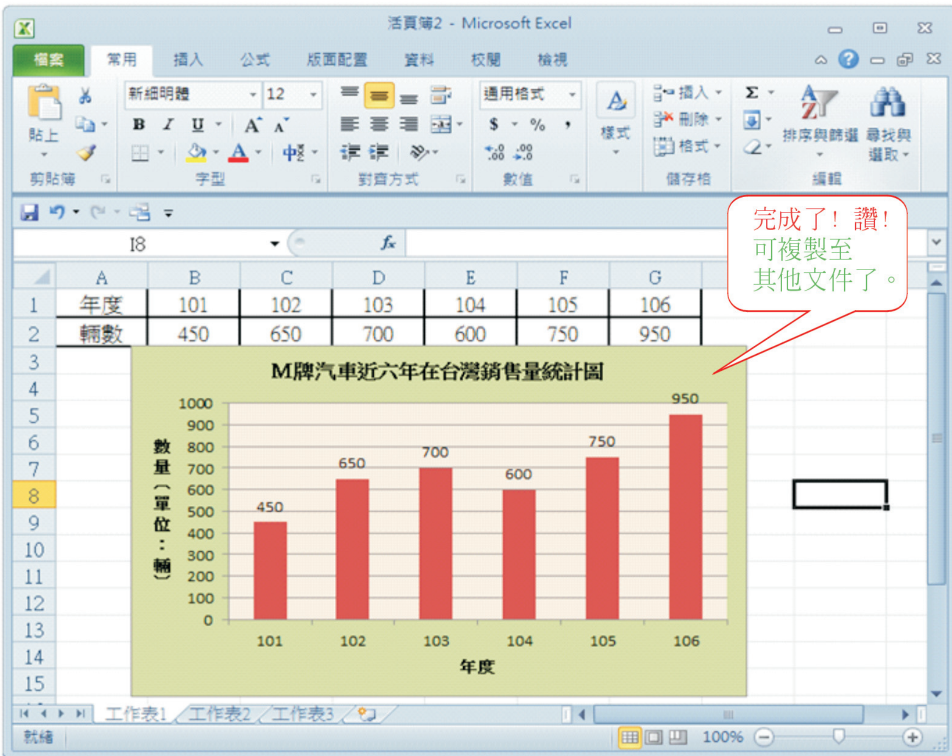


圖表區格式－1
1.滑鼠移至圖表區按右鍵，即出現選單
M牌汽車近六年在台灣銷售量統計圖
年度
2.點選「 圖表區格式」

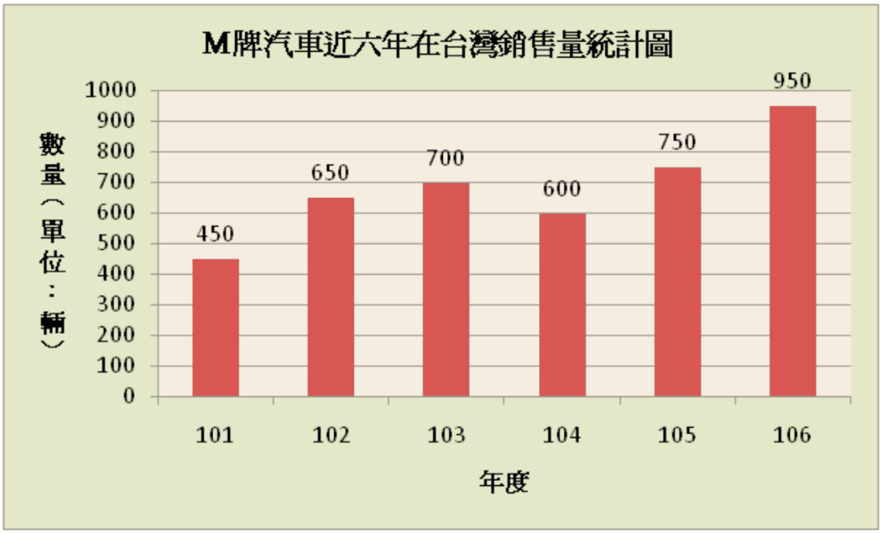


圖表區格式－2
3.點選「填滿」
4.點選「實心填滿」
5.下拉選取顏色
6.點「關閉」


資料標籤增刪、配置
1.點選「版面配置」
2.點選「資料標籤」
3.點選「終點外側」
無
關閉選取項目的資料標籤
置中
顯示資料標籤，並置於資料點的中央
終點內側
顯示資料標籤，並置於資料點的終點內側
基底內側
顯示資料標籤，並置於資料點的基底內側
終點外側
其他資料標籤選項(M)...


完成了！讚！
可複製至
其他文件了。
M牌汽車近六年在台灣銷售量統計圖
數量（單位：輛）
年度

㈣完成的圖表



註：

1. 上列之製作程序或要領並非唯一，限於篇幅，尚有許多功能與技巧未能逐一介紹。只要多練習，熟稔各種功能，將有更簡潔的技巧，使統計圖表的編製更容易、更快速。
2. 一個圖表有兩種不同類型的圖表（如：自我練習 4 之圖表－雙垂直座標；一爲主垂直座標，一爲垂直副座標），其製作程序與技巧，請參閱演示 5。

演示 1

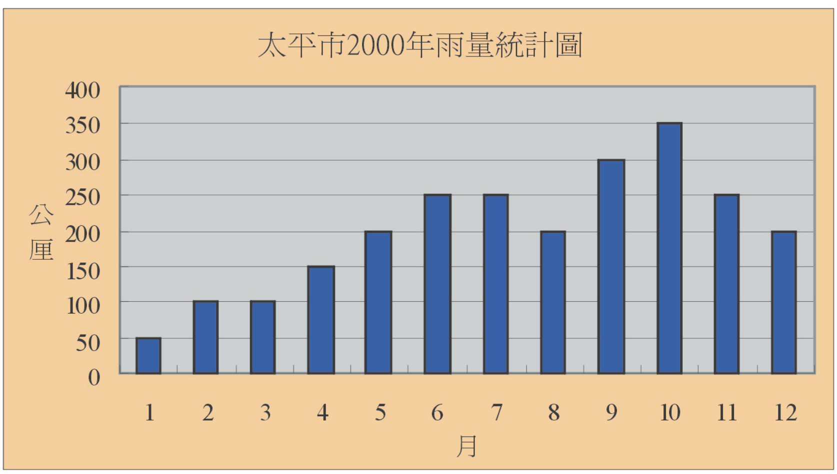
下表爲太平市2000年的降雨情形，請依下表製作統計圖，並回答下列問題。

⑴請問雨量最多的是那一個月？ ⑵請問雨量最少的是那一個月？

太平市 2000 年雨量統計表

月份	雨量（公厘）
１	50
２	100
３	100
４	150
５	200
６	250
７	250
８	200
９	300
１０	350
１１	250
１２	200

解 太平市 2000 年的雨量統計圖：



⑴雨量最多是 10 月 ⑵雨量最少是 1 月。

自我練習 1

民國 105 年底前台灣已成立九座國家公園，分別是墾丁、陽明山、太魯閣、玉山、雪霸、金門、東沙環礁、台江、澎湖南方四島。根據民調中心訪問 1217 位 20 歲以上的台灣地區民眾，詢問民眾知不知道目前台灣的國家公園一共有幾個？記錄回答結果，得到下表：

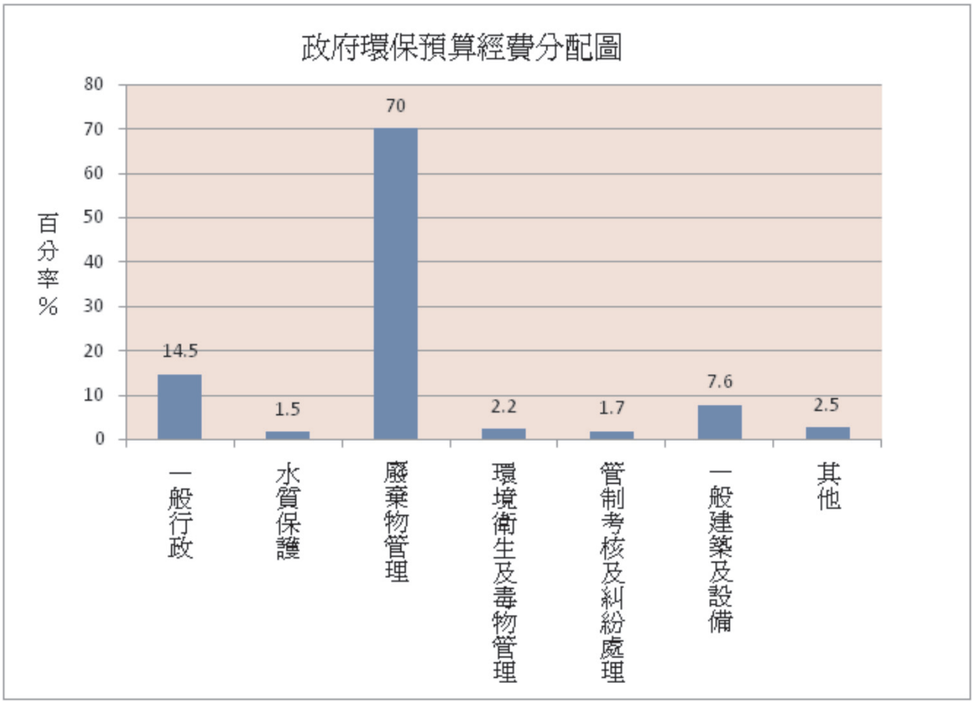
個數	3 個	4 個	5 個	6 個	7 個	8 個	9 個	9 個以上	不知道
百分比（%）	6	10	15	8	4	3	3	1	50

以橫軸表所佔百分比，縱軸表民眾回答台灣的國家公園個數，畫出橫條圖（長條圖以水平放置）

不知道											
9 個以上											
9 個											
8 個											
7 個											
6 個											
5 個											
4 個											
3 個											
	0%		10%		20%		30%		40%		50%

演示 2

近幾年來政府致力於環保工作，政府環保預算經費分配如下圖：



(1)政府環保預算經費，那一項所佔的比例最多？

(2)政府環保預算經費，那一項所佔的比例最少？

(3)政府編列環保預算經費 100 億元，請問預算經費最多的項目與最少的項目相差多少元？

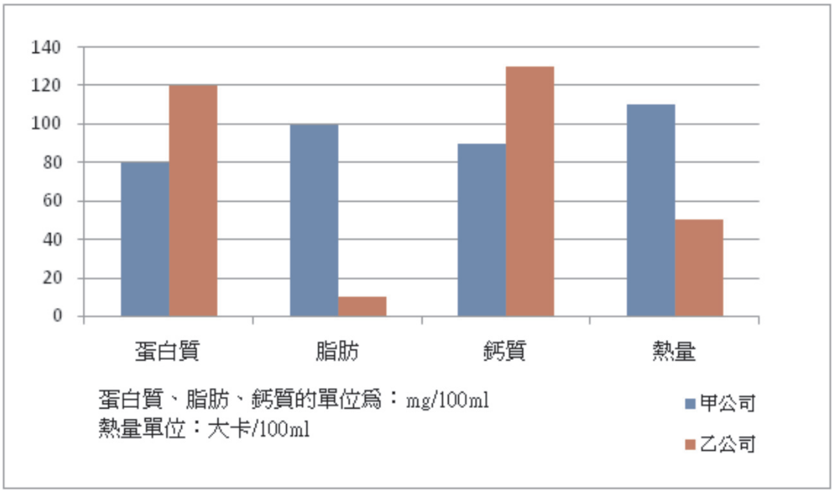
解 (1)廢棄物管理

(2)水質保護

(3) $100\times(70\%-1.5\%)=100\times 68.5\%=68.5$(億)

自我練習 2

下圖是甲公司鮮乳與乙公司鮮乳營養成分比較圖：



從這個長條圖中，我們可以看出：

⑴ 需要補充脂肪和熱量的人適合喝__________鮮乳（甲公司或乙公司）。

⑵需要補充鈣質的人較適合喝 __________ 鮮乳（甲公司或乙公司）。

圓形圖是將一個圓分割成若干個扇形，每個扇形的面積與它所表示之項目的次數或數量成比例。如果圓形圖上的資料點過多，資料點顯示可能會太擁擠而難以閱讀。在這種狀況下，可考慮使用折線圖。

演示 3

下表紀錄了一般民公眾認為最出色的科學家：

科學家	次數（人）
愛因斯坦	280
牛頓	240
伽利略	180
高斯	150
傅利葉	150

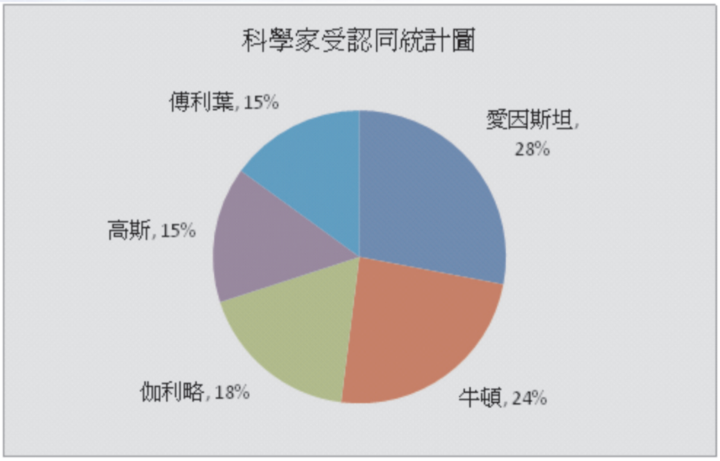
(1)求調查的總人數。

(2)求各個科學家調查結果的認同百分比，並製做圓形圖。

解 (1) $280+240+180+150+150=1000$ （人）

(2)

科學家	次數（人）	百分比
愛因斯坦	280	28%
牛頓	240	24%
伽利略	180	18%
高斯	150	15%
傅利葉	150	15%



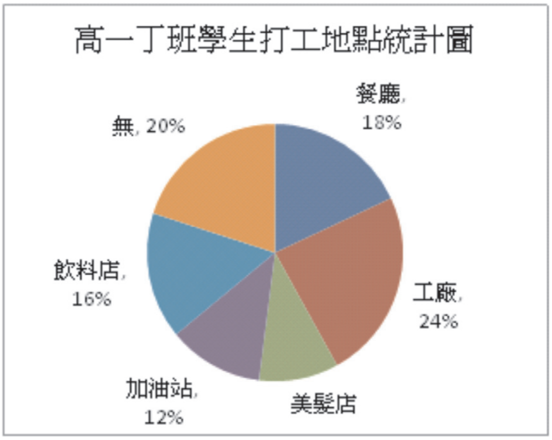
自我練習 3

右圖為旭日高中高一丁班 50 位同學打工地點的圓形圖，就圖上已知部分工作的百分比，請問：

(1)美髮店打工所占的百分比是多少？

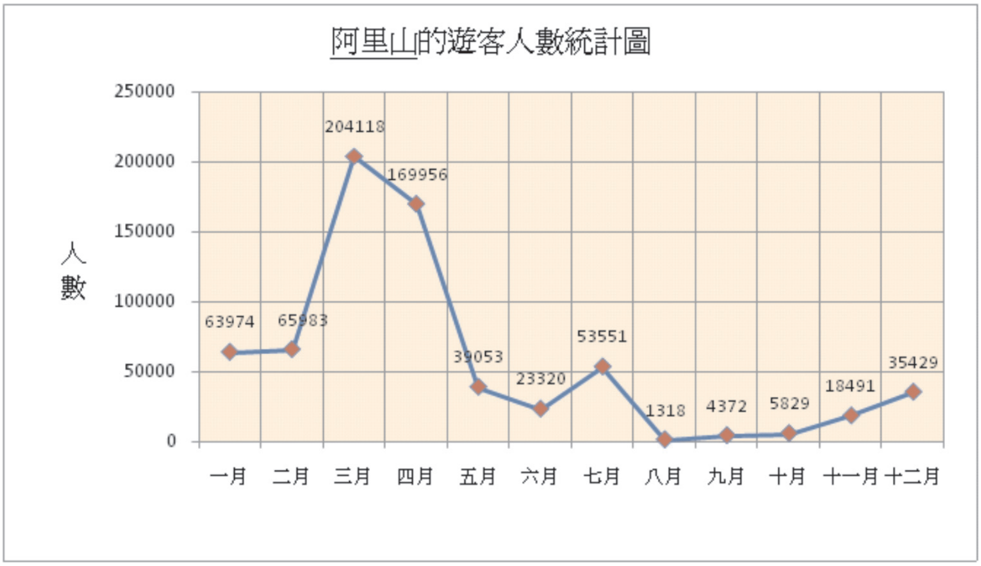
(2)在餐廳打工的人數有多少人？

(3)在那個場所打工人數最多？



演示 4

下圖為某年各月份，阿里山的遊客人數統計圖：



根據上圖，回答下列問題：

(1)那兩個月份是阿里山旅遊的旺季？兩個月的遊客人數共有多少人？

(2)那些月份是阿里山旅遊的淡季？（遊客不滿二萬人）這些月份的遊客人數共有多少人？

解 (1)三月和四月，

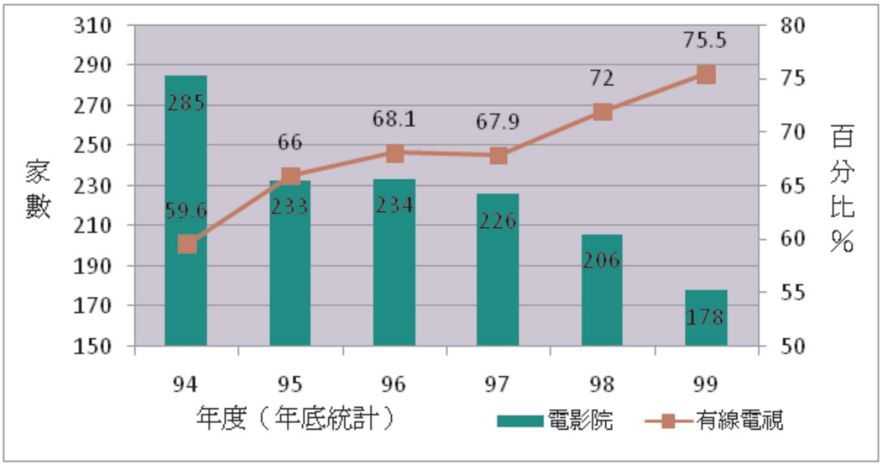
$204118+169956=374074$（人）。

(2)八月、九月、十月和十一月，

$13189+4372+5829+18491=41881$（人）。

自我練習 4

下圖為我國近幾年來電影院的家數及有線電視普及率的消長情形：



⑴ 從民國 94 年到民國 99 年，電影院的家數總共減少多少？

⑵ 從民國 94 年到民國 99 年，有線電視的普及率增加幾個百分點？

當我們所討論的資料是某一區間之資料（又稱連續型資料）時，如身高、體重的範圍，即前一組的上限為後一組的下限，**直方圖**是最常用的圖形。而直方圖是彼此相連的長條狀圖形，以各組組距為底，次數為高，分別畫出長方形。**次數分配折線圖**則是將直方圖中各長方形上端中點（即組中點 $=\dfrac{上限+下限}{2}$），以線段連接起來的曲折圖形。連續型資料的折線圖通常為一封閉的曲線，所以會將折線圖兩側均延伸至 x 軸，其端點可設想左右各加一組資料，取其次數（或人數）均為 0。

演示 5

某機構針對 200 位成年婦女，量測其每分鐘脈搏跳動的次數，列表如下：

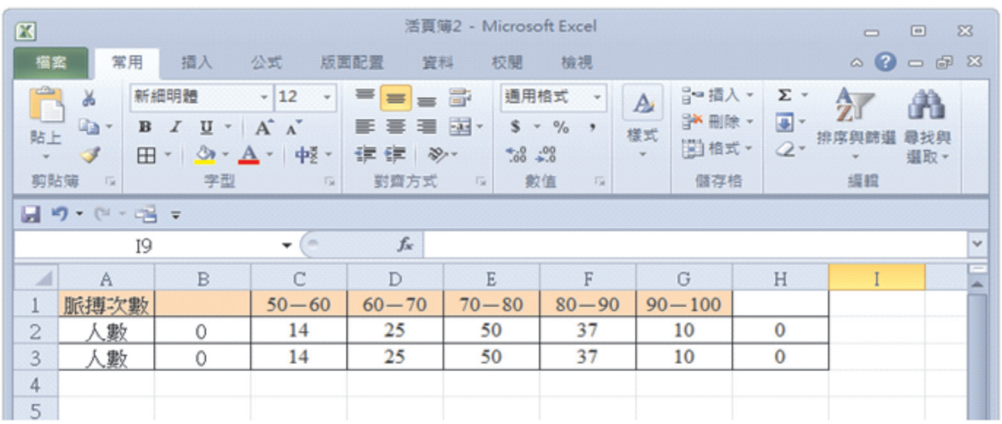
脈搏次數	50~60	60~70	70~80	80~90	90~100
人數	14	25	50	37	10

以橫軸爲脈搏次數，縱軸爲人數，同一繪圖區畫出直方圖和次數分配折線圖 (折線圖脈搏次數 50 以前及 100 以後爲 0) 。

解 一、建置資料表

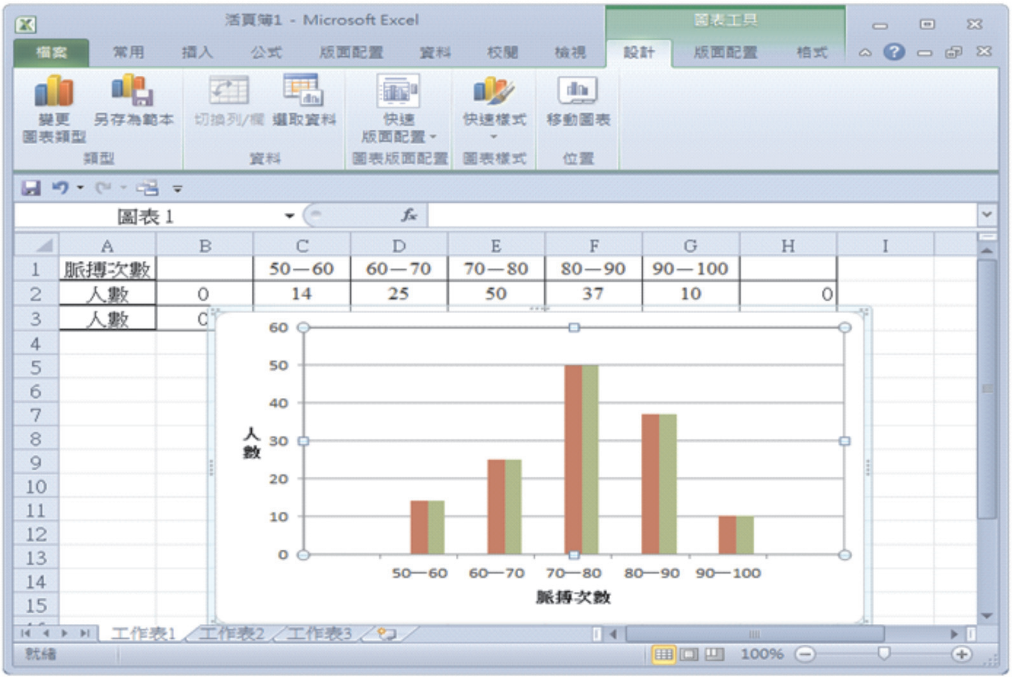
⑴將題目中之資料表複製至 *excel* 工作表，並且人數列多複製一列，因爲同一資料要顯示兩種不同類型之圖表。(若已經提供兩種資料列，則不用複製，如：隨堂練習四) 。

⑵人數資料列多複製一欄列，並且前後補「0」(因爲折線圖脈搏次數 50 以前及 100 以後爲 0) 。如下圖：

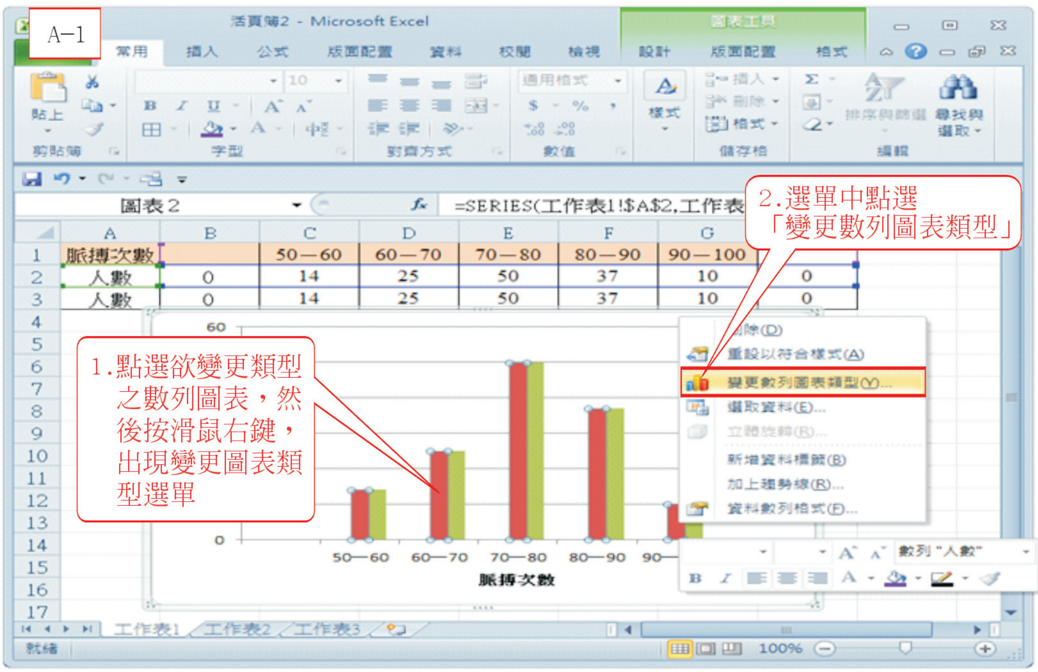


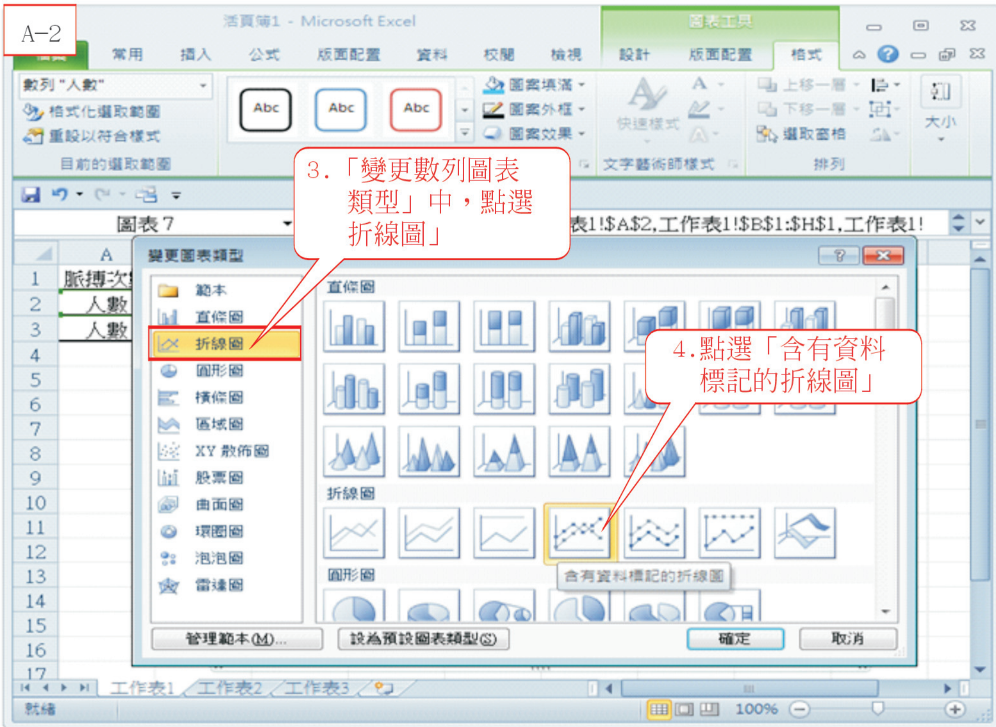
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	脈搏次數		50—60	60—70	70—80	80—90	90—100		
2	人數	0	14	25	50	37	10	0	
3	人數	0	14	25	50	37	10	0	
4									
5									

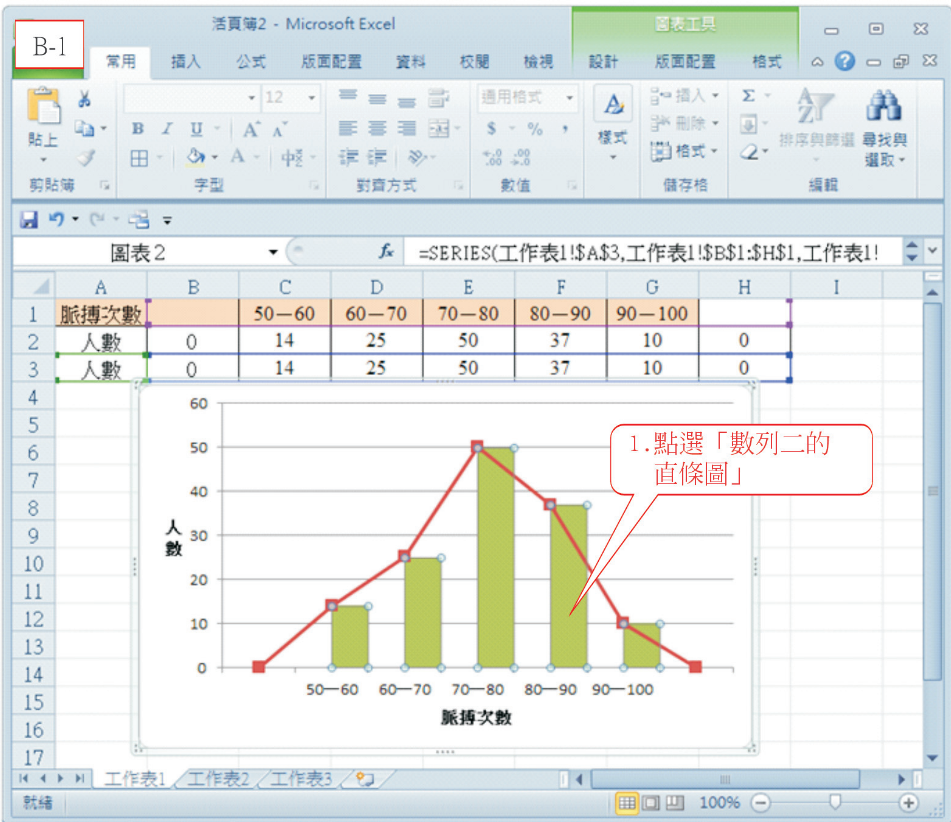
二、建置圖表：依照前面統計圖製作要領完成統計圖（此時圖上有數列一與數列二兩直線圖）。如下圖：

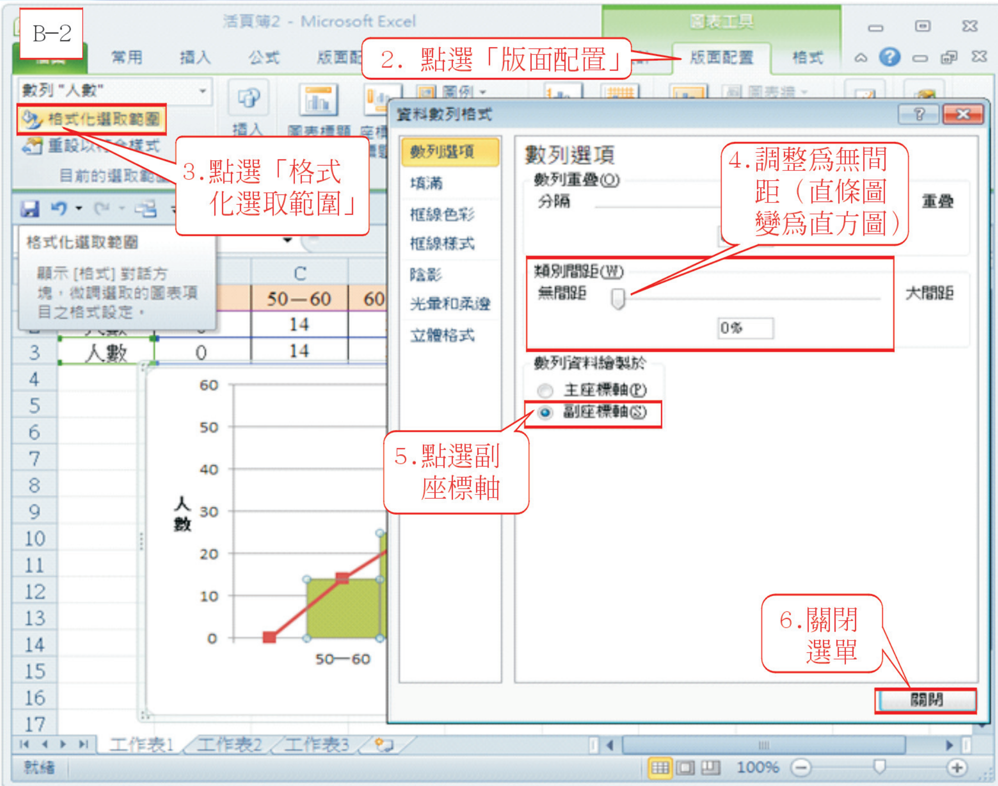


三、修正圖表：，請依據各圖內說明之標號(A~H)內之編碼順序操作，即可完成兩種不同類型的(座標)圖表。




A–2
活頁簿1 - Microsoft Excel
3.「變更數列圖表類型」中，點選折線圖」
4.點選「含有資料標記的折線圖」
變更圖表類型
範本
直條圖
折線圖
圓形圖
橫條圖
區域圖
XY 散佈圖
股票圖
曲面圖
環圈圖
泡泡圖
雷達圖
含有資料標記的折線圖
管理範本(M)...
設為預設圖表類型(S)
確定
取消

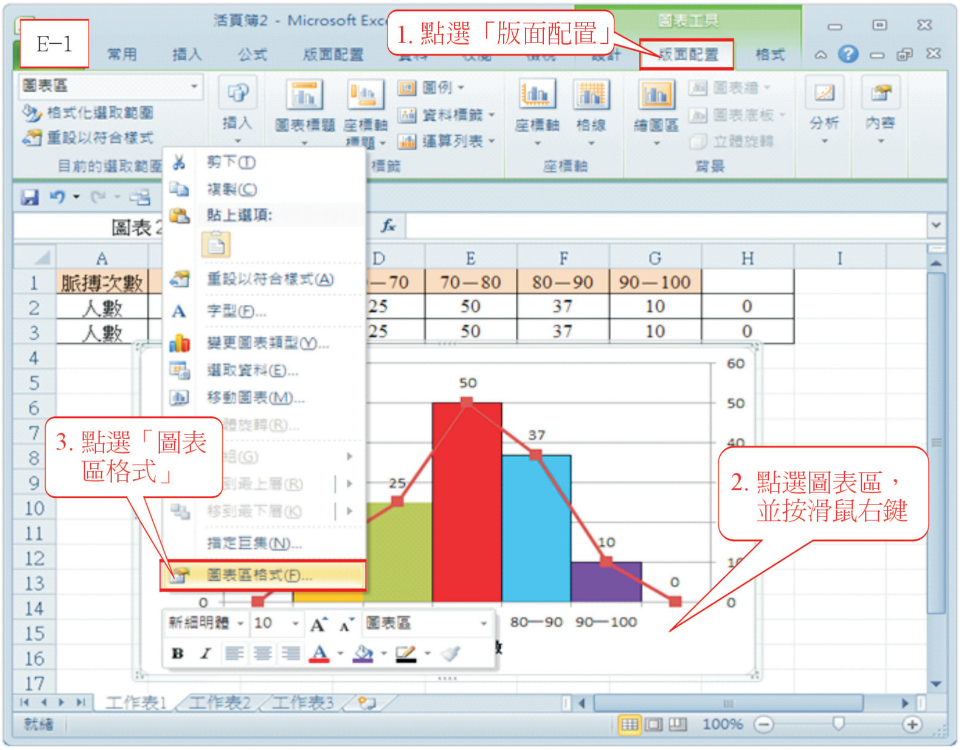

B-1
活頁簿2 - Microsoft Excel
=SERIES(工作表1!$A$3,工作表1!$B$1:$H$1,工作表1!
脈搏次數
50—60
60—70
70—80
80—90
90—100
人數
1.點選「數列二的直條圖」

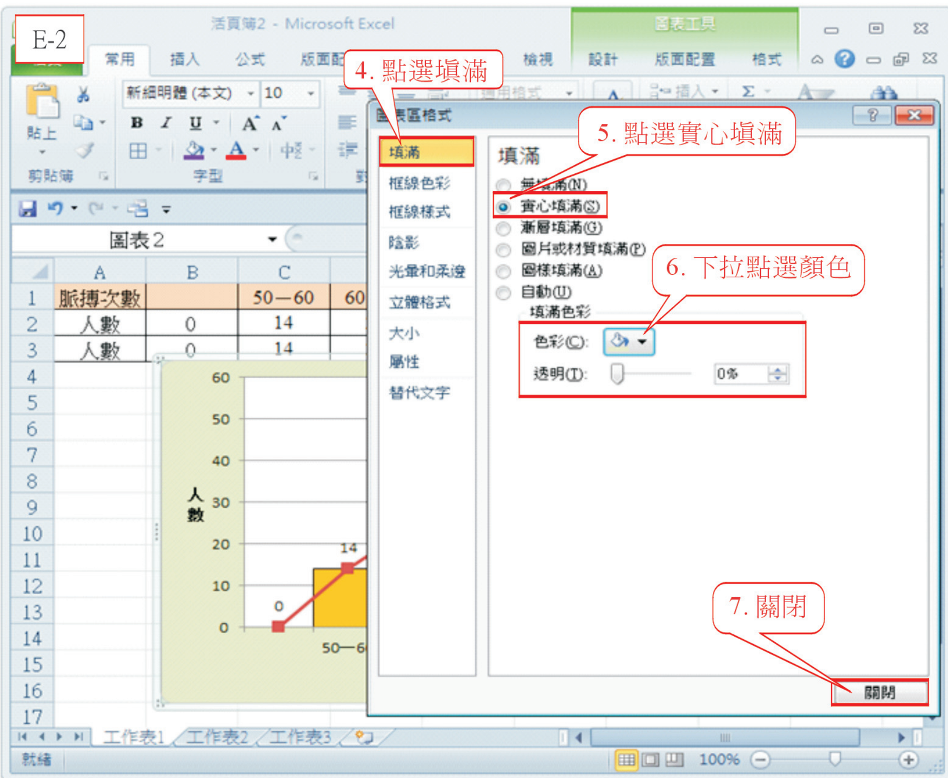

B−2
2. 點選「版面配置」
3.點選「格式化選取範圍」
4.調整為無間距（直條圖變為直方圖）
5.點選副座標軸
6.關閉選單


C−1
1.點選50－60區間的直條圖
2. 點選「格式」
3.點選「圖案填滿」
4. 點選顏色

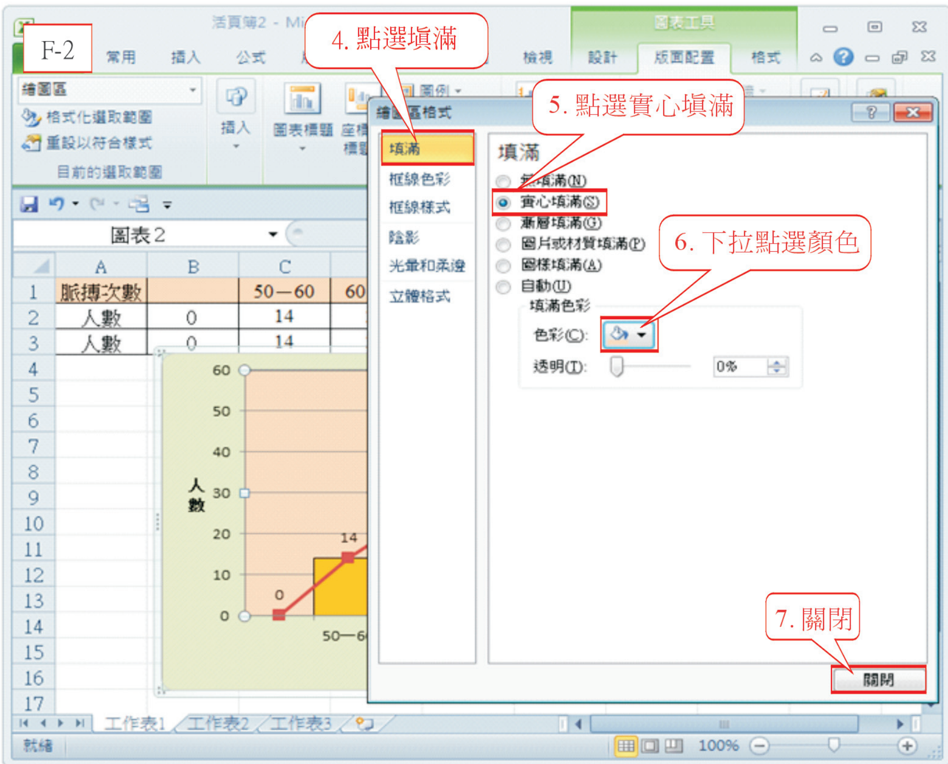

C-2
5.點選圖案外框
6. 點選顏色
7.其餘各區的直條圖，請依照1~6的要領分別變更其顏色與外框


D-1
1. 點選「版面配置」
2.點選「資料標籤」
3. 點選「顯示資料標籤，並置於上方」

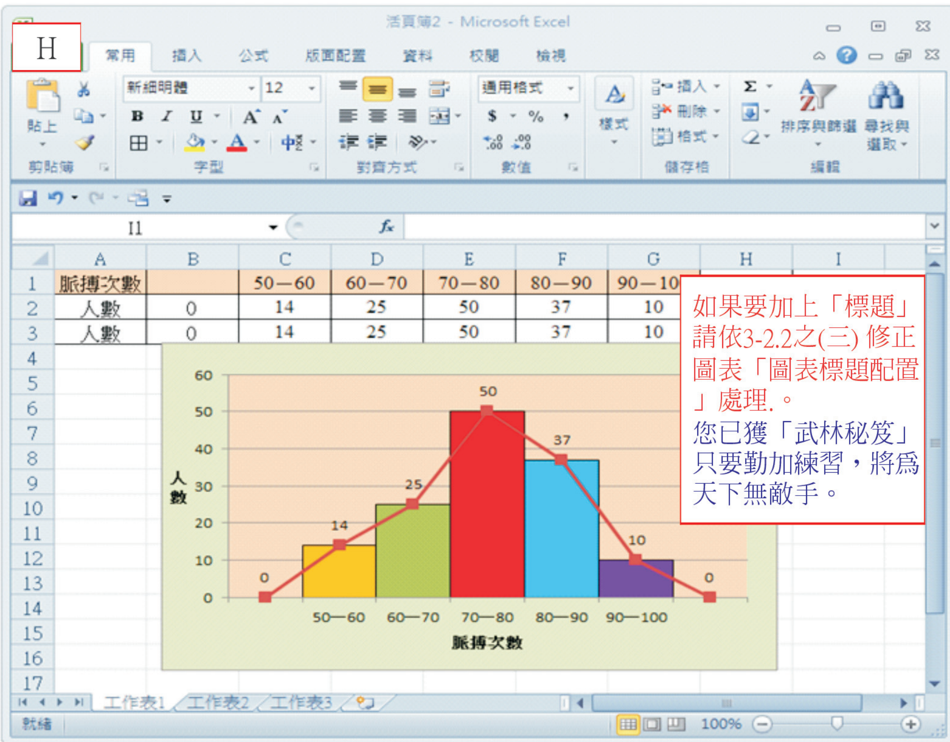

E–1
1. 點選「版面配置」
2. 點選圖表區，並按滑鼠右鍵
3. 點選「圖表區格式」


E-2
4. 點選填滿
5. 點選實心填滿
6. 下拉點選顏色
7. 關閉


F-1
1. 點選「版面配置」
2. 點選繪圖區
3. 點選「其他繪圖區選項」
脈搏次數
人數
50—60
60—70
70—80
80—90
90—100

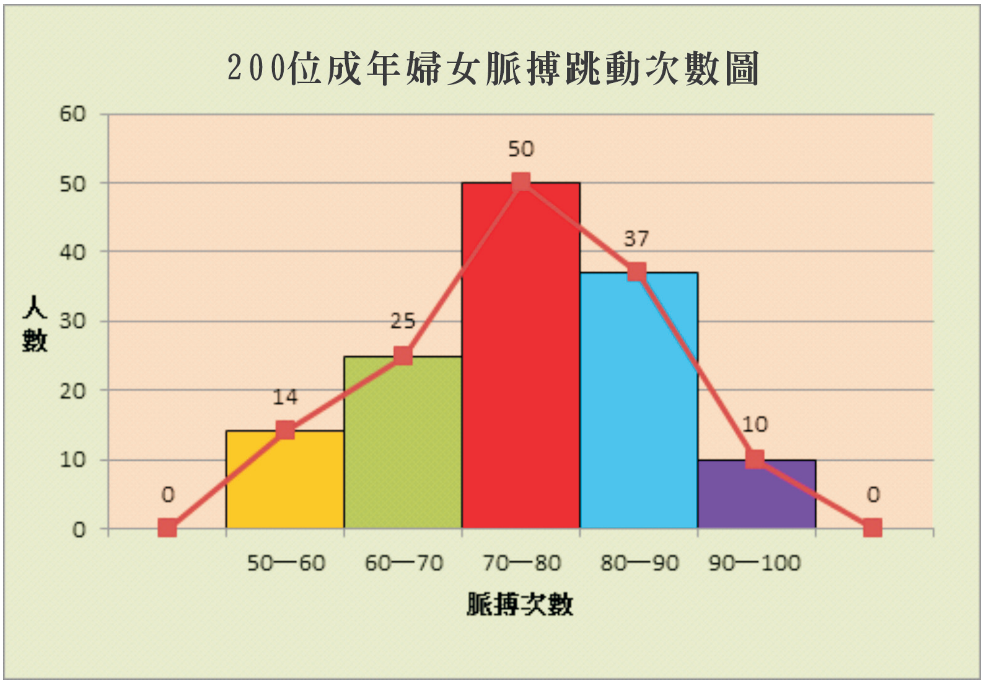

F-2
4. 點選填滿
5. 點選實心填滿
6. 下拉點選顏色
7. 關閉
繪圖區格式
填滿
框線色彩
框線樣式
陰影
光暈和柔邊
立體格式
無填滿(N)
實心填滿(S)
漸層填滿(G)
圖片或材質填滿(P)
圖樣填滿(A)
自動(U)
填滿色彩
色彩(C):
透明(T):
0%
關閉


G
活頁簿2 - Microsoft Excel
點選副座標軸，並按Delete鍵，予以刪除(若與主座標刻度不同就不要刪除，如自我練習四)
副座標軸 垂直 (數值) 軸
脈搏次數
人數
50—60
60—70
70—80
80—90
90—100

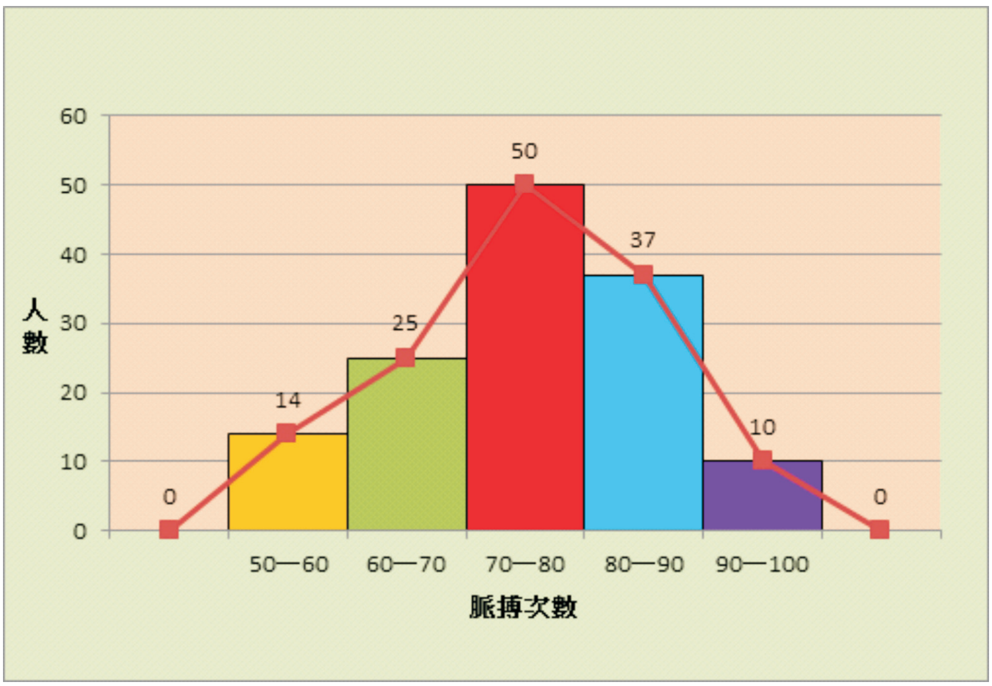

H
活頁簿2 - Microsoft Excel
如果要加上「標題」請依3-2.2之(三) 修正圖表「圖表標題配置」處理.。
您已獲「武林秘笈」只要勤加練習，將爲天下無敵手。
脈搏次數
人數
50—60
60—70
70—80
80—90
90—100

四、完成的圖表

(1)有標題

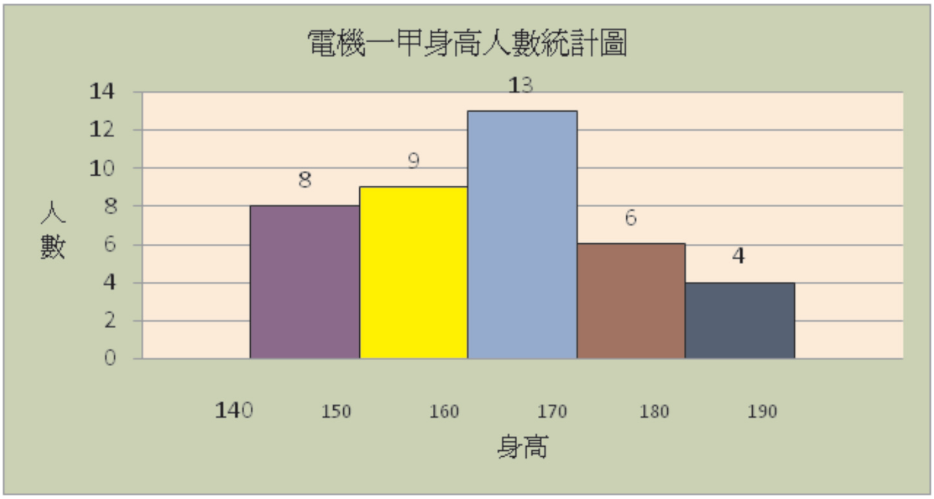


(2)無標題



自我練習 5

下圖為電機一甲班全班同學的身高次數分配直方圖，請依據統計圖回答下列的問題。



(1)全班有多少人？
(2)那一組的身高人數最多？
(3)身高在 160 公分以下有多少人？
(4)身高至少 180 公分有多少人？

上一節我們已經學會製作次數分配表，為了使讀者更容易知道某種特性的次數多寡，將其次數累積所製作的表稱為「**累積次數分配表**」。累積次數的方法一般都從數值較小的一組，逐次向數值較大的一組累積(也有從數值較大的一組，逐次向數值較小的一組累積)。如下表所示：

組　別	次　數	累積次數
L_1-U_1	f_1	f_1
L_2-U_2	f_2	f_1+f_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
L_k-U_k	f_k	$f_1+f_2+\cdots+f_k$
總　計	n	

演示 6

學務處爲尊重學生意見，對目前下課休息十分鐘時間提出調查，共收回一百份問卷，以下是調查後所統計的次數分配表：

休息時間（分鐘）	次數（人）
0~5	3
5~10	17
10~15	19
15~20	15
20~30	46
總計	100

請完成其累積次數分配表。

解

休息時間（分鐘）	次數（人）	累積次數
0~5	3	3
5~10	17	3＋17＝20
10~15	19	20＋19＝39
15~20	15	39＋15＝54
20~30	46	54＋46＝100
總　計	100	

自我練習 6

下表爲住宿同學起床時間的次數分配表：

(1)將其累積次數分配表製完成。

(2) 6：00 之前起床的學生人數有多少人？

(3) 6：20 之後起床的學生人數有多少人？

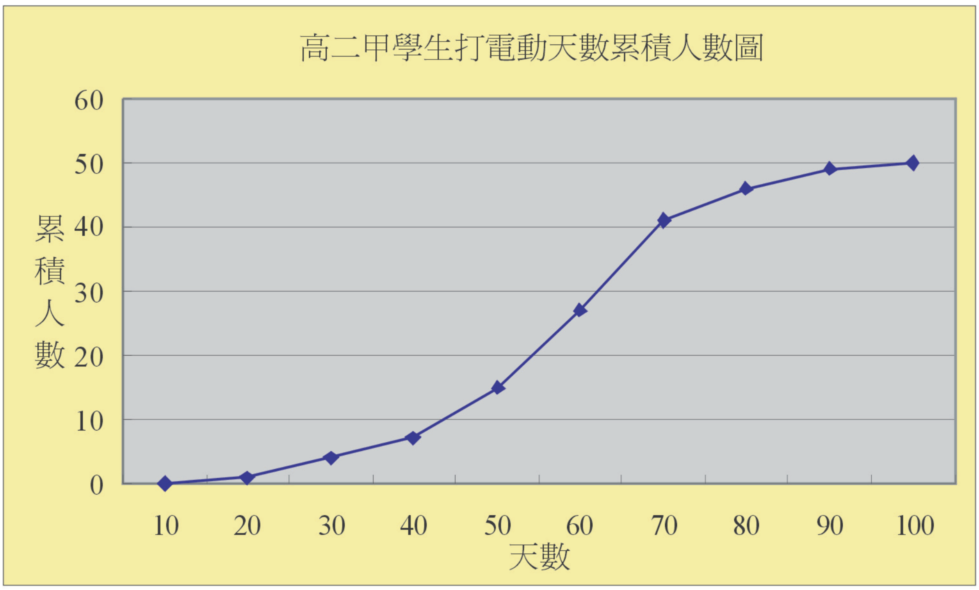
起床時間	劃記	次數(人)	累積次數
5：30~ 5：40	丅	2	
5：40~ 5：50	丅	2	
5：50~ 6：00	正	5	
6：00~ 6：10	正正	10	
6：10~ 6：20	正丅	7	
6：20~6：30	正丅	7	
6：30~6：40	正一	6	

演示 7

以下是高二甲班 50 位學生一年內打電動天數問卷調查結果，統計出來的累積次數分配表，請製作累積次數分配折線圖。

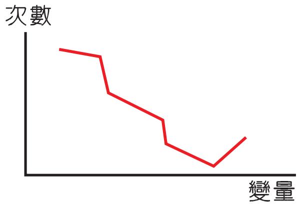
天 數	次數（人數）	累積次數
10~20	1	1
20~30	3	4
30~40	3	7
40~50	8	15
50~60	12	27
60~70	14	41
70~80	5	46
80~90	3	49
90~100	1	50

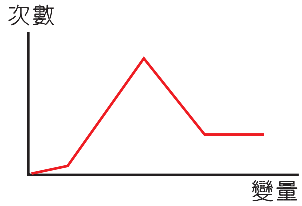
解

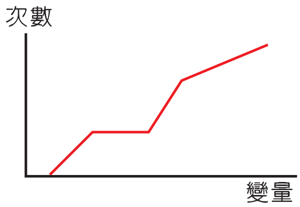


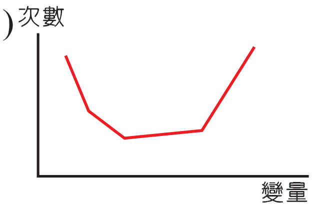
自我練習 7

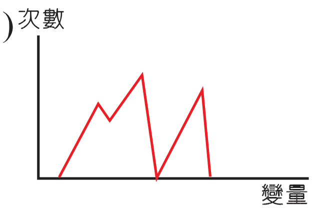
下列何者爲累積次數折線圖？

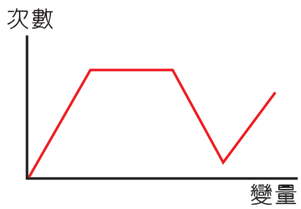
(*A*)


(*B*)


(*C*)


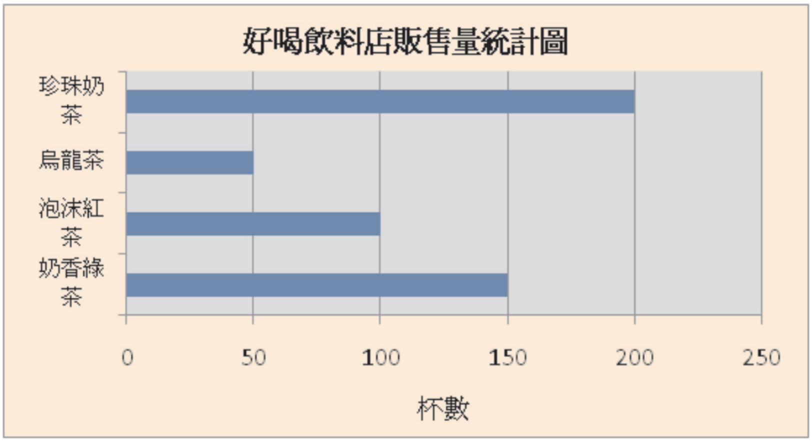
(*D*)


(*E*)


(*F*)


3-2 自我挑戰

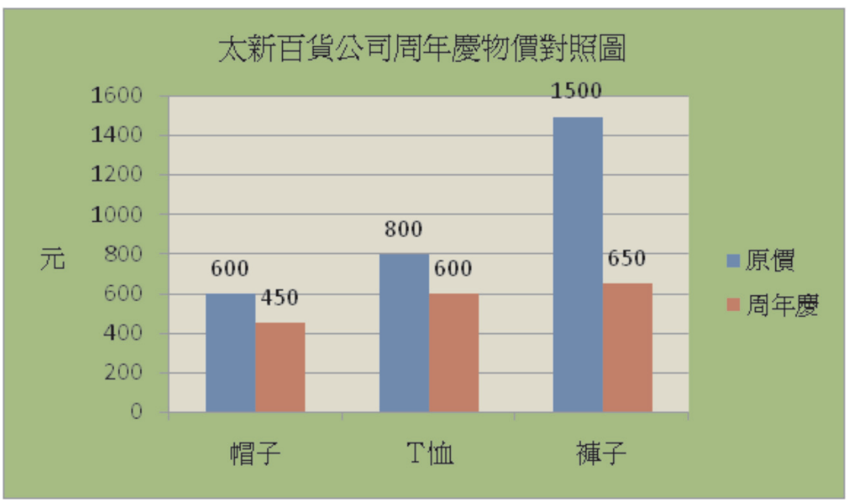
1. 下圖是好喝飲料店一天內四種暢銷產品的銷售狀況，讀出長條圖上的資料，回答下面問題。



⑴由銷售數量得知，那一種產品最受歡迎？

⑵四種暢銷飲料的銷售數量各爲多少？

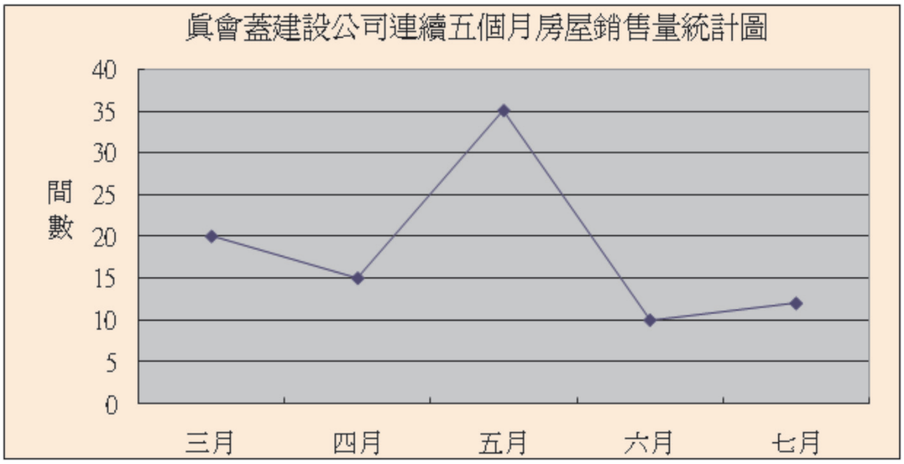
2. 下圖是太新百貨公司周年慶物品售價對照表，請依長條圖上的資料，回答下面問題。



⑴ 帽子、T 恤和褲子以原價各買一件，需要多少元？

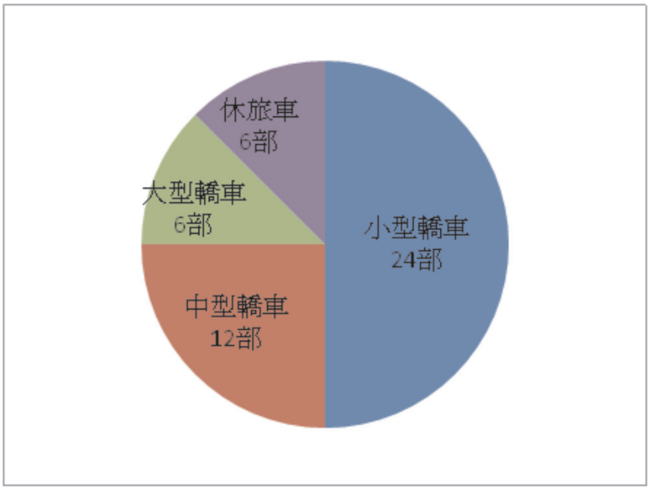
(2) 帽子、T恤和褲子在周年慶各買一件，比原價購買時，可節省多少元？

3. 下圖是眞會蓋建設公司連續 5 個月的售屋情形，讀出折線圖上的資料，回答下面問題。



六月和五月比較，六月的房屋銷售量是增加還是減少？相差多少間？

4. 下圖是汽車商 9 月份各類車子的銷售情形，讀出圓形圖上的資料，回答下面問題。

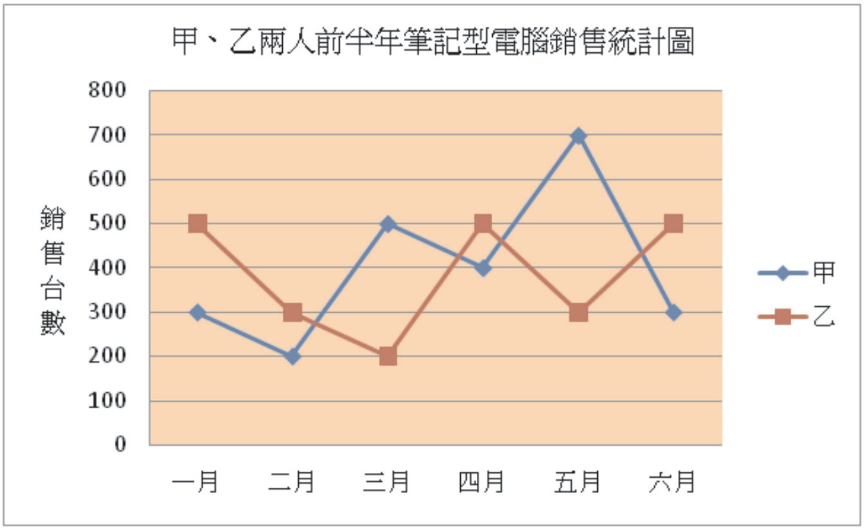


(1)「小型轎車」賣出的數量所代表的圖形占了圓形的幾分之幾？

(2) 那兩類車子賣出的數量一樣多？代表的圖形各占了圓形的幾分之幾？

(3) 9 月份車商全部賣出了多少部車子？

5. 甲、乙兩人爲同一家電腦公司的銷售員，下圖爲一到六月兩人的筆記型電腦銷售數量折線圖，請問那一位銷售員業績較佳？



6. 下表爲商一 1 班學生數學體重的次數分配表：

(1)完成「累積次數」表格。

(2)體重不滿 60 公斤者有多少人，占全班多少百分比？

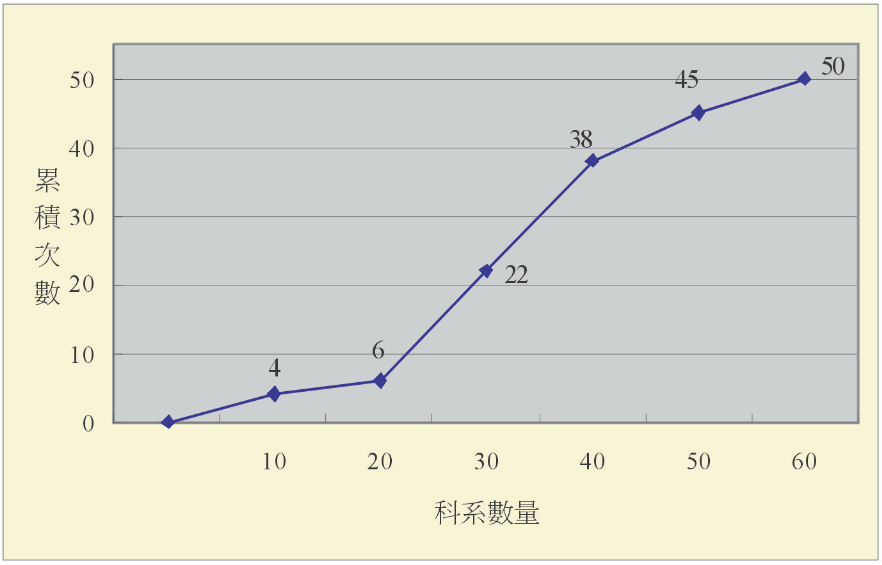
(3) 50～80 公斤者有多少人，占全班多少百分比？

(4) 80 公斤以上者有多少人，占全班多少百分比？

高三丁班學生體重分配表		
體重(公斤)	人數	累積人數
40~50	2	
50~60	5	
60~70	13	
70~80	12	
80~90	6	
90~100	2	
總計	40	

第三章 統計圖表

7. 下圖是成功高商三年一班統測入學考後選填大學科系數量的統計：



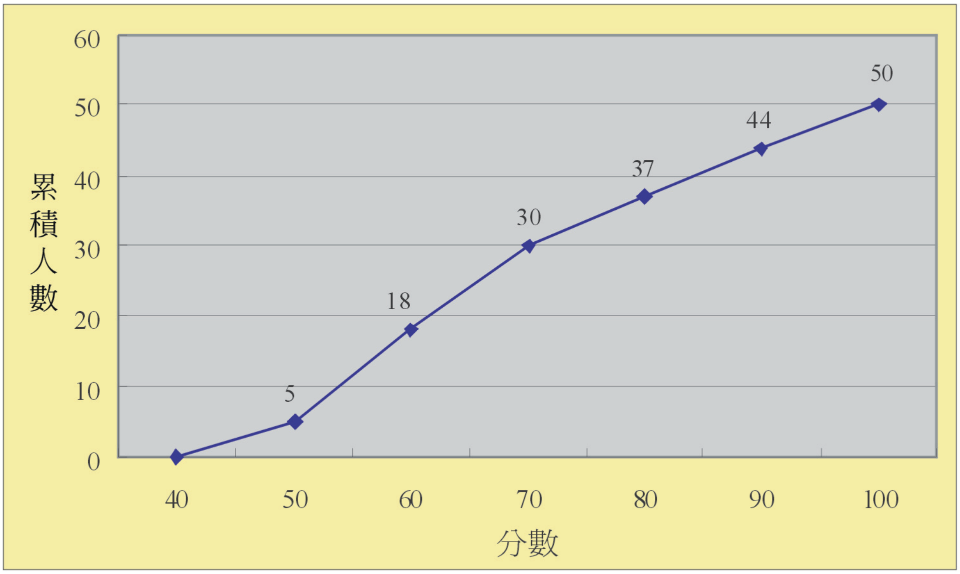
完成下列表格。

科系數量	人數	累積（人數）
0～10		
10～20		
20～30		
30～40		
40～50		
50～60		
合計	50	

8.高二忠班第一次段考數學成績之累積次數分配曲線圖如下，

試問：(1)不及格者有幾人？

(2)至少 70 分者有幾人？



本章重點整理

1. 製作次數分配表製作步驟

(1)求全距。

(2)定組數。

(3)定組距。

(4)定組限。

(5)劃　記。

(6)計算次數。

2. 累積次數分配表

組　別	次　數	累積次數
L_1-U_1	f_1	f_1
L_2-U_2	f_2	f_1+f_2
⋮	⋮	⋮
⋮	⋮	⋮
L_k-U_k	f_k	$f_1+f_2+\cdots+f_k$
總　計	n	

3. 算術平均數

(1)未分組資料　：設 n 個資料為 $x_1,x_2,\cdots x_n$，則其算術平均數

$$\overline{X}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\text{。}$$

(2)已分組資料：

組中點	x_1	x_2	…	x_k	合計
次數	f_1	f_2	…	f_k	n

$$\overline{X}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n}，其中\ n=f_1+f_2+\cdots+f_k$$

4.中位數

將一群數據資料由小到大排列，位置在最中間的數據稱爲中位數。如果資料的個數是奇數，則中間那個數據就是這群資料的中位數；如果資料的個數是偶數，則中間那兩個數據的算術平均數就是這群資料的中位數。

5.全距

一組資料最大值與最小值的差距。

將 n 個數值資料由小到大排列 $x_1,x_2,\cdots,x_n$，則全距$=x_n-x_1$。

6.四分位距

整體資料中央的數叫作中位數，中位數本身不算，在中位數前之資料中的中位數叫作第 1 四分位數，在中位數後之資料中的中位數叫作第 3 四分位數，第 3 四分位數與第 1 四分位數的差叫做**四分位距**。

notes

心得筆記欄

單元 4

機率概念

■ 4－1　集合的基本概念

4 – 1.1 集合的表示法

4 – 1.2 集合的關係

4 – 1.3 集合的運算

■ 4－2　樣本空間及機率概念

4 – 2.1 樣本空間

4 – 2.2 機率概念

一、機率的定義

二、機率的性質

三、期望值

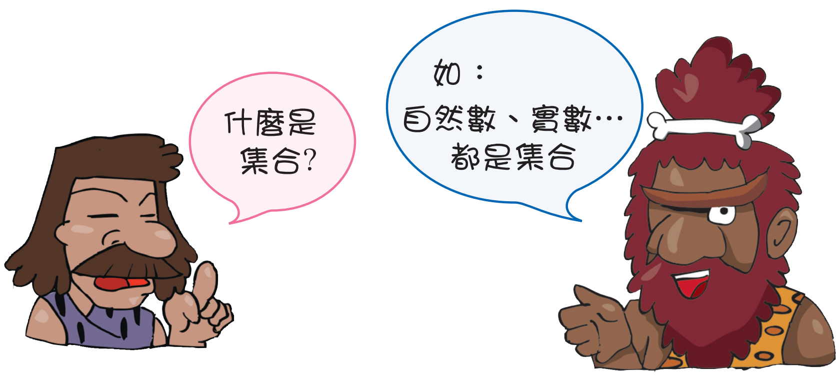
單元四 機率概念

我們生活處處都是機率，樂透彩及統一發票的中獎機會，颱風登陸的機會，製造產品的不良品率，降雨率，占卜…等等，都是機率問題。生活中的各種情境將會影響機率，使得結果讓我們意想不到，若能學會運用機率，以爲日常行爲的指引，對我們的生活將助益不少。甚至把它當做一種興趣，予以研究探討，還可增加生活的樂趣，以及鍛鍊個人的思維。

本單元首先將介紹集合的基本概念，以爲討論機率之基礎工具，然後說明樣本空間、機率概念及期望值。

4－1 集合的基本概念

什麼是集合呢？集合是具有某些共同性質且範圍明確的事物所組成的群體，如自然數、實數、台鹽公司的員工…，都是集合。組成集合的每個事物稱爲該集合的元素，組成集合的元素互異且無特定順序，一個集合的元素可以有限個，也可以無限個。



演示 1

下列何者不是集合？ (A)所有質數 (B)高一甲班中身高 170 公分以上同學 (C)高一甲班中體重大約 80 公斤的同學。

解 (C)，因爲大約 80 公斤的敘述不明確。

自我練習 1

下列何者爲集合？
(A)全校的帥哥 (B)全球美女 (C)中華民國歷任總統 (D)所有偶數。

4-1.1 集合的表示法

我們常以大寫英文字母來表示一個集合，例如：A 爲 0～9 之間的整數所成的集合。常用的集合有：

R 表示所有實數的集合

Q 表示所有有理數的集合

Z 表示所有整數的集合

N 表示所自然數(正整數)的集合

集合除了用文字直接描述外，常以列舉法(表列式)及構式法(構造式)來描述一個集合。列舉法就是將一個集合的所有元素在{ }內逐一寫出，而構式法是在{ }內，以小寫的英文字母代表元素，然後使用數學符號或文字描述元素的性質。例如：A 爲 0～9 之間的整數所成的集合，可表示：

(1) 列舉法

$A=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

(2) 構式法

$A=\{x\,|\,0\leq x\leq 9，x\text{爲整數}\}$

演示 2

試以列舉法，寫出擲一硬幣所有出現結果所成的集合A。

解 正常的硬幣有 “正”與“反”兩面。
所以A＝｛正，反｝

自我練習 2

試以列舉法，表示丟一骰子所有出現點數所成的集合B。

演示 3

試以構式法，表示大於 5 且小於 20 的實數所成的集合 A。

解 $A=\{x \mid 5<x<20$，x 為實數$\}$

自我練習 3

試以構式法，表示大於等於 1 且小於 24 的所有自然數所成的集合 B。

4-1.2 集合的關係

㈠若 a 是一個集合 A 的元素，記做 $a\in A$，讀做 a 屬於 A；而 b 不是集合 A 的元素記做 $b\notin A$，讀做 b 不屬於 A。

例如：若有一集合 $A=\{x|2\leq x\leq 6$，$x\in N\}$，所以
3 是集合 A 的元素，$3\in A$，但 10 不在 A 集合內，$10\notin A$

㈡ A、B 爲兩集合，若 A 的每一個元素都屬於 B，記做 $A \subset B$（讀做 A 包含於 B）；或記做 $B \supset A$（讀做 B 包含 A）。若 A 至少有一個元素不屬於 B，記做 $A \not\subset B$（讀做 A 不包含於 B）。

例如：若有集合 $A = \{x \mid 2<x<6，x \in N\}$，

集合 $B = \{0,1,2,3,4,5,6\}$

A 中之元素有 3、4、5，而 $3 \in B$，$4 \in B$，$5 \in B$

A 中每一個元素 B 中都有，就是 A 包含於 B（符號 $A \subset B$）

㈢空集合

若一個集合中無任何元素存在，則稱此集合爲空集合，以{ }或∅表示。

例如：集合 $T = \{x \mid x<0，x \in N\}$，

因爲沒有小於 0 的自然數，

所以 T 是空集合（$T = \varnothing$）

㈣宇集或基集

所討論的事物的全體所成的集合稱爲宇集；記做「U」。

例如：擲一個骰子的點數所成的集合 $U = \{1,2,3,4,5,6\}$。

㈤子集合（部分集合）

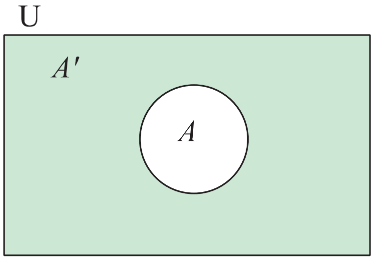
A、B 爲兩集合，若 $A \subset B$，則稱 A 爲 B 的子集合（部分集合）。

∅爲任意集合的子集，集合本身爲自己的子集。若集合 A 的元素有 k 個（記做 $n(A) = k$），則集合 A 有 2^k 個子集。

㈥補集合（餘集）

集合 A 爲宇集 U 的子集合，屬於 U 但不屬於 A 的元素所成之集合（如右圖），記做 A'，讀做 A 的補集。

即 $A' = \{x \mid x \in U$ 但 $x \notin A\}$。



㈦集合的相等

集合 A、B，若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$，則 A 與 B 相等，記做 $A = B$，讀做 A 等於 B。

例如：集合 $A=\{1,3,5\}$，$B=\{3,5,1\}$，$C=\{1,3,1,5\}$，

我們檢視集合 A、B 的各元素，相互包含對方之元素，

即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，所以 $A=B$，

同樣檢視集合 B、C 的各元素，也相互包含對方之元素，

所以 $B\subset C$ 且 $C\subset B$，所以 $B=C$

因 $A=B$ 又 $B=C$，故 $A=B=C$

注意：集合中之元素可不考慮出現的順序，而同一元素出現數個與出現一個是相同的。

演示 4

集合 $A=\{x\,|\,1\le x\le 9$，x 為正整數$\}$，$B=\{1,3,5,7,8,9\}$，下列敘述何者正確？

(1) $2\in B$　(2) $5\in A$　(3) $B\in A$　(4) $A\subset B$　(5) $B\subset A$。

解 (2)、(5)

(1) 2 不是集合 B 的元素

(3)兩集合的關係 $B\subset A$

(4) A 集合的元素 2、4、6 並不是集合 B 的元素，故 $A\not\subset B$

自我練習 4

Z 表所有整數所成的集合，P 表所有質數的集合，下列何者錯誤?

(1) $3\in P$　(2) $0\in Z$　(3) $5\subset P$　(4) $Z\subset P$

演示 5

若 $A=\{1,2,3,5,7,8,9\}$，$B=\{1,3,5\}$，$C=\{1,3,4\}$下列何者正確?

(1) $B\in A$　(2) $C\subset A$　(3) $C\subset B$　(4) $B\subset A$。

解 (4)

(1) $B\in A$ 應改爲 $B\subset A$ 才正確

(2) $4\in C$ 但 $4\notin A$

(3) $4\in C$ 但 $4\notin B$

自我練習 5

若$A=\{a,b,c,x,y,z\}$，$B=\{b,c,d,e,f\}$，$C=\{b,c,d,e\}$下列何者錯誤?

(1) $f\in B$　(2) $C\subset A$　(3) $C\subset B$　(4) $B\subset A$。

演示 6

下列何者非空集合？

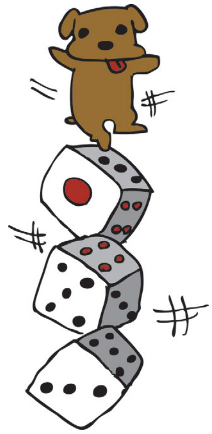
(1) $\{\varnothing\}$　(2) $\{\ \ \}$　(3) $\{x\mid x<0，x\in N\}$

(4) $\{x\mid x>6$，x爲擲一骰子的點數$\}$。

解 (1)，因爲集合$\{\varnothing\}$有一個元素爲“$\varnothing$”

(注意：空集合亦可當元素)

自我練習 6



下列何者爲空集合？

(1) $\{0\}$

(2) $\{-1,1\}$

(3) $\{x\,|\,x<10$，x 爲整數$\}$

(4) $\{x\,|\,x<2$，x爲擲兩個骰子的點數和$\}$。

演示 7

試列出集合 $A=\{1,2,3\}$的所有子集合。

解　$\{\quad\},\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}$

自我練習 7

寫出集合$A=\{x\,|\,6\le x\le 8$，x 爲正整數$\}$的所有子集合。

演示 8

集合$U=\{a,b,c,d\}$，子集的個數有幾個？

解　$n(U)=4$，其子集合個數爲 $2^4=2\times 2\times 2\times 2=16$ 個

自我練習 8

集合 $A=\{x\,|\,5\le x\le 9$，x 為正整數$\}$ 的子集合個數有多少個？

演示 9

正常的硬幣有正反兩面，試以列舉法寫出擲兩枚硬幣的宇集U。

解 U＝{(正，正)，(正，反)，(反，正)，(反，反)}

自我練習 9

將「我為人人，人人為我」八個字，分別寫在八張卡片上，今任抽一張，試寫出其宇集U。

演示 10

宇集U $=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A=\{2,3,4,5\}$，$B=\{2,4,6,8\}$試求 A'，B'。

解 $A'=U-A=\{0,1,6,7,8,9\}$ $B'=U-B=\{0,1,3,5,7,9\}$

自我練習 10

宇集U $=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$，$A=\{b,d,f,g,h,i\}$，$B=\{a,c,d,f,g,h,i\}$ 試求 A'，B'。

演示11

下列哪些集合相等？

$A=\{a,b,c\}$，$B=\{b,a,c\}$，$C=\{a,b,c,a,b\}$，$D=\{a,b,c,d\}$，$E=\{a,c\}$

解　$A=B=C$

自我練習11

下列那些集合是相等？

$A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,2\}$，$C=\{3,1,2\}$，$D=\{1,2,3,1,1\}$，$E=\{2,4\}$

演示12

集合 $A=\{2,5\}$、$B=\{x,2\}$，若 $A=B$，試問 x 是多少？

解　因爲 $A=B$，則 A 的元素與 B 的元素相同
所以 $x=5$

自我練習12

集合 $A=\{x\,|\,1\leq x\leq 2, x$ 爲自然數$\}$、$B=\{x,2\}$，若 $A=B$，試問 x 是多少？

4-1.3 集合的運算

集合的運算包含交集、聯集及差集，其運算結果仍是以集合表示。

1、交集

集合 A 與集合 B 的交集爲兩集合中共同的元素所成的集合，以 $A \cap B$ 表示，構式法表示爲$A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$。如圖 4 — 1 中藍色區域。

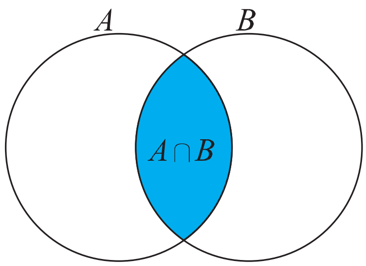


圖 4-1

2、聯集

集合 A 與集合 B 的聯集爲兩集合中的所有元素所成的集合，以 $A \cup B$ 表示，構式法表示爲 $A \cup B = \{x | x \in A$ 或 $x \in B\}$。如圖 4 — 2 中黃色加綠色再加藍色的區域。

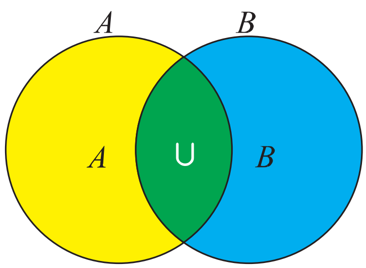


圖 4 — 2

3、差集

屬於集合 A 但不屬於集合 B 的所有元素所成的集合，以 A-B 表示，構式法表示為 $A-B=\{x\,|\,x\in A$ 但 $x\notin B\}$。如圖 4－3 中藍色區域。

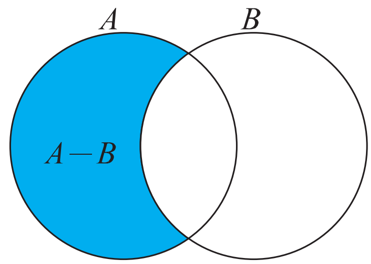


圖 4-3

上述運算中的集合，其元素個數若為有限個，則運算結果的元素個數計算如下：

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$
$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$
$$n(A')=n(\mathrm{U})-n(A)$$

演示13

若集合 $A=\{0,1,2,3,4,5\}$，$B=\{2,3,4,5,6,7\}$，試求 $A\cap B$，$A\cup B$，$A-B$，$B-A$。

解

$A\cap B=\{2,3,4,5\}$

$A\cup B=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

$A-B=\{0,1\}$

$B-A=\{6,7\}$。。

自我練習 13

若集合 $A=\{a,b,c,d,e\}$，$B=\{b,d,f,g,h,i\}$，
試求 $A\cap B$，$A\cup B$，$A-B$，$B-A$。

演示 14

宇集 $U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A=\{2,3,4,5\}$，$B=\{2,4,6,8\}$，
試求 $A'\cap B'$，$A'\cup B'$。

解　$A'=\{0,1,6,7,8,9\}$

$B'=\{0,1,3,5,7,9\}$

所以 $A'\cap B'=\{0,1,7,9\}$

$A'\cup B'=\{0,1,3,5,6,7,8,9\}$

自我練習 14

若宇集 $U=\{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$，且 $A=\{b,d,f,g,h,i\}$，
$B=\{a,c,d,f,g,h,i\}$，試求 $A'\cap B'$，$A'\cup B'$。

演示15

高二甲班全班 42 人，第一次期中考後統計，英文及格有 15 人，數學及格有 20 人，兩科均及格者有 10 人，試求兩科均不及格者有幾人？

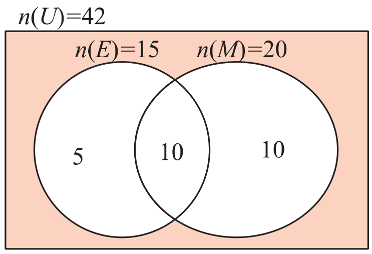


圖 4－4

解　U 表高二甲班全班同學所成的集合

E 表英文及格的同學所成的集合

M 表數學及格的同學所成的集合

$n(U)=42$，$n(E)=15$，$n(M)=20$，

$n(E\cap M)=10$

$$n(E\cup M)=n(E)+n(M)-n(E\cap M)$$
$$=15+20-10=25$$

兩科中至少有一科及格者有 $n(E\cup M)=25$ 人

兩科均不及格者有 $42-25=17$ 人

自我練習15

試問在 1 到 50 之間的自然數中，不是 3 的倍數也不是 5 的倍數有多少個？

4-1 自我挑戰

1. 以 A 表示一年四季所成的集合為：

____________________________。

2. $A=\{$一,二,三$\}$，集合 A 的子集合有____________個。

3. 在 1 到 100 的整數中，4 或 6 的倍數有____________個。

4. 集合 $A=\{3,7\}$、$B=\{7,a\}$，若 $A=B$ 則 $a=$ ____________。

5. $A=\{b,d,f,g,h,i\}$，$B=\{a,c,d,f,g,h,i\}$，試求：

(1) $A\cap B$　(2) $A\cup B$　(3) $A-B$　(4) $B-A$。

6. 宇集 $U=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{2,4,6,8\}$，

$C=\{1,3,5,7,9\}$試求：(1) $A'\cap B$　(2) $A\cup B'$　(3) $(A\cup B)-C$。

7. $A=\{1,2,3\}$，$B=\{x\,|\,x^2-5x+6=0$，$x\in R\}$，試求：

(1) $A\cap B$　(2) $A\cup B$。

8. 下列何者不是集合？

(1)所有自然數

(2)高一乙班的女生

(3)體重約 60 公斤的男生

(4) 100 以下的質數

9. $A=\{x\mid x$ 為小於 10 的質數$\}$，集合 A 的子集合有多少個？

10. 在 1 到 100 之間是 4 的倍數，但不是 5 的倍數有多少個？

4－2 樣本空間及機率概念

在進行一實驗之前，已經知道所有可能發生的結果，但無法預知會發生何種結果，我們將此實驗稱爲**隨機試驗**。例如：

⑴擲二枚五十元的硬幣（如圖 4－5），觀察正面和反面出現的情況。

圖 4－5 (50 元硬幣)

⑵擲三顆骰子（如圖 4－6），觀察出現的點數情況。

圖 4－6 (骰子)

⑶從一副撲克牌的紅心牌中抽出一張（如圖 4－7），觀察其點數可能出現的情況。

圖 4－7 (撲克牌)

4-2.1 樣本空間與事件

● 樣本空間

在一個隨機試驗中，所有可能發生的結果所成的集合，稱為該試驗的「**樣本空間**」，常以S或**Ω**表示。樣本空間中的每一個元素稱為「樣本」。

樣本空間 S 的表示法與集合相同，例如：擲一枚硬幣的樣本空間 $S=$ {正，反}。擲一個骰子的樣本空間 $S=\{1，2，3，4，5，6\}$。

演示 1

擲一個公正骰子，試列出樣本空間 S。

解 骰子有六面，其點數為 1~6，
故 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$

自我練習 1

一副撲克牌中，不含鬼牌有 52 張，四種花色各有 13 種點數，自一副撲克牌中抽出一張，試寫出其樣本空間S。

演示 2

民間拜拜時擲筊(如圖 4－8)，試寫出其樣本空間 S。


圖 4－8（擲筊）

解 筊有一對，一正一反時，稱爲“聖杯”（表肯定之意）。

$S=\{$(正,正),(正,反),(反,正),(反,反)$\}$

自我練習 2

擲一公正骰子兩次，試寫出其樣本空間。

● 事件

在隨機試驗中符合某設定條件的結果所成的集合稱爲“事件”，也就是說「事件爲樣本空間的子集合」。例如：擲一骰子之樣本空間爲 S，若 A 爲出現偶數點的事件，即 $A=\{2,4,6\}$，則 $A\subset S$。事件的種類如下：

1. **簡單事件**：在隨機試驗中，僅含有一個結果的事件。
2. **複合事件**：在隨機試驗中，含有兩個或兩個以上結果的事件。
3. **全事件**：等同於樣本空間，又稱爲必然事件。
4. **空事件**：不可能發生的事件，此事件爲空集合。
5. **餘事件**：事件A以外的結果所成的集合稱爲 A 的餘事件，以 A'表示。
6. **和事件**：事件的聯集。即 $A\cup B$ 爲事件 A、B 的和事件，即 A 或 B 至少有一發生的事件。
7. **積事件**：事件的交集。即 $A\cap B$ 爲事件 A、B 的積事件，即 A 和 B 同時發生的事件。
8. **互斥事件**：兩事件的交集爲空集合稱之。事件 A 和 B，若$A\cap B=\varnothing$；稱 A，B 爲互斥事件。

演示 3

擲一個骰子，觀察出現點數，A 表出現奇數點的事件，B 表出現點數大於 3 的事件，試答下列各題：

(1) A 的餘事件?

(2) A 與 B 的和事件?

(3) A 與 B 的積事件?

(4) A 與 B 是否為互斥事件?

解 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，$A=\{1,3,5\}$，$B=\{4,5,6\}$，

(1) $A'=\{2,4,6\}$

(2) $A\cup B=\{1,3,4,5,6\}$

(3) $A\cap B=\{5\}$

(4) 因為 $A\cap B=\{5\}\neq\varnothing$，所以 A 與 B 非互斥事件

自我練習 3

擲一個公正骰子兩次，觀察其出現點數的情形，A 表點數和小於 7 的事件，B 表兩次點數相同的事件，試答下列各題：

(1) A 與 B 的和事件?

(2) A 與 B 的積事件?

演示 4

擲一公正硬幣三次，觀察其情形，A 表出現兩正面的事件，B 表第一次出現正面的事件，試答下列各題：

(1) A 的餘事件?

(2) A 與 B 的和事件?

(3) A 與 B 的積事件?

解　以＋表正面，－表反面

$S=\{(+++),(++-),(+-+),(-++),(+--),$
$(-+-),(--+),(---)\}$

$A=\{(++-),(+-+),(-++)\}$

$B=\{(+++),(++-),(+-+),(+--)\}$

(1) $A'=\{(+++),(+--),(-+-),(--+),(---)\}$

(2) $A\cup B=\{(+++),(++-),(+-+),(-++),(+--)\}$

(3) $A\cap B=\{(++-),(+-+)\}$

自我練習 4

甲、乙、丙三人排成一列，觀察其排列順序，若 A 表甲必排在第一位的事件，B 表乙不排最後一位的事件，請問：

(1) B 的餘事件?

(2) A 與 B 的和事件?

(3) A 與 B 的積事件?

4-2.2 機率概念

在電視氣象報告中常聽到：「明天降雨的機率為 80 %，出門時請記得帶雨具」。但有時是降雨機率高，卻不會真的下雨。「機率」是代表一件事情發生的可能性，機率高則表示會發生的可能性大，而機率低也不能說不會發生。如果能準確的估算不確定事件發生的機率，對決策的判定會有極大的幫助。

一、機率的定義

機率是由觀察許多試驗的結果而來，如擲硬幣及骰子的試驗。在一隨機試驗中，每一種結果出現的可能性均相同，若有限樣本空間 S 的結果個數以 $n(S)$ 表示，則每一個結果發生的機率為 $\frac{1}{n(S)}$。又若事件 A 所包含的結果個數為 $n(A)$，則 A 事件發生的機率為 $\frac{n(A)}{n(S)}$，記做 $P(A)$，

即 $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ 。

演示 5

擲筊一次，得"聖筊"的機率為多少？

解 樣本空間 $S=\{$(正正)，(正反)，(反正)，(反反)$\}$

A 為"聖筊"的事件，A $=\{$(正反)，(反正)$\}$

$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ 。

自我練習 5

擲一個公正骰子，出現偶數點的機率爲多少？

演示 6

擲一公正骰子二次，求點數和爲 9 的機率。

解　樣本空間S＝{(1,1),(1,2),……(6,5),(6,6)}，$n(S)=6\times 6=36$

點數和爲 9 的事件爲 A

$A=\{(3,6),(4,5),(5,4),(6,3)\}$，$n(A)=4$

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

自我練習 6

從一副撲克牌 52 張牌中，隨意抽出一張，點數小於 5 的機率爲何？（點數 A 當做點數 1）

演示 7

袋中有紅球 3 顆，白球 3 顆，黑球 5 顆，黃球 1 顆，自袋隨意取一球，若每球被取出的機率均相等，求取出一球爲紅球的機率。

解　袋中共有 12 球，而紅球有 3 顆，

故取出爲紅球的機率爲 $\frac{3}{12}=\frac{1}{4}$。

自我練習 7

袋中有 1～5 號球，各號球的數量和其號碼相同，自袋隨意取一球，若每球被取出的機率均相等，求取出一球為奇數號球的機率。

二、機率的性質

設 S 為樣本空間，而 A、B 為其兩事件，則機率的基本性質為：

1. $P(S)=1$，全事件發生的機率為 1。
2. $P(\varnothing)=0$，空事件發生的機率為 0。
3. $0\leq P(A)\leq 1$，A 為一般事件。
4. $P(A')=1-P(A)$，A 為一般事件而為 A' 其餘事件。
5. $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$，$A$、$B$ 為一般事件。
6. $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$，A、B為一般事件。

演示 8

在某個隨機試驗中，事件 A 發生的機率為$\frac{1}{4}$，B 事件發生的機率為$\frac{3}{4}$，兩事件同時發生的機率為$\frac{1}{5}$，求(1) $P(A')$　(2)$P(A\cup B)$

解 $P(A)=\frac{1}{4}$，$P(B)=\frac{3}{4}$，$P(A\cap B)=\frac{1}{5}$

(1) $P(A')=1-P(A)=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$

(2) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\frac{1}{5}$$

$$=\frac{4}{5}$$

自我練習 8

在隨機試驗中，事件 A、B 發生的機率分別爲$P(A')=\frac{1}{4}$，$P(B)=\frac{2}{3}$，且 $P(A\cap B)=\frac{1}{2}$，求 (1) $P(B')$　(2) $P(A\cup B)$

演示 9

事件A、B，若 $P(A)=0.3$，$P(B)=0.5$，$P(A\cap B)=0.2$求　(1)$P(A\cup B)$　(2)$P(A\cap B')$

解 (1) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.3+0.5-0.2=0.6$

(2) $P(A\cap B')=P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)=0.3-0.2=0.1$

自我練習 9

事件 A、B 發生的機率分別爲 $P(A)=\frac{1}{3}$，$P(B)=\frac{2}{3}$，且 $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$，求 (1)$P(A\cap B')$　(2) $P(A'\cap B)$

三、期望值

在一個試驗中，對每個發生的事件均給予相對應的一個數值或報酬，而事件發生的機率與其所對應的數值的乘積，稱爲**期望值**(數學期望值或均值)，其定義如下：

1. 事件 A 發生的機率爲 P，其對應值或報酬爲 m，則其期望值記做 $E(A)$，且 $E(A)=P\cdot m$。

2. 某個試驗的樣本空間 S，可分割成 k 個事件，且任兩個事件的交集均爲空集合，各事件發生的機率分別爲 $P_1, P_2 \cdots\cdots, P_k$，且 $P_1 + P_2 + \cdots\cdots + P_k = 1$，若其對應的數值爲 $m_1, m_2 \cdots\cdots, m_k$，則此試驗的期望值爲
$E = P_1 \cdot m_1 + P_2 \cdot m_2 + \cdots\cdots + P_k \cdot m_k$。

演示 10

擲硬幣遊戲，若出現正面可得 10 元，反面要付 6 元，試求擲一次的期望值爲何？

解　出現正、反面的機率均爲 $\frac{1}{2}$，
正面的期望值爲 $\frac{1}{2} \times 10 = 5$ 元，
反面的期望值爲 $\frac{1}{2} \times (-6) = -3$ 元，
故擲一次的期望值爲 $5 + (-3) = 2$ 元。

自我練習 10

擲骰子遊戲，若出現 5 或 6 點可得 12 元，出現 1，2，3 點要付 10 元，試求擲一次骰子的期望值。

演示 11

抽獎活動中，佰元紅包有 3 個，伍佰元的有 5 個，仟元的有 2 個，任抽一個的金額期望值爲多少？

解　紅包共有 10 個，抽到佰元的機率爲$\frac{3}{10}$，伍佰元的爲$\frac{5}{10}$，仟元的爲$\frac{2}{10}$，故期望值 $E = 100\times\frac{3}{10} + 500\times\frac{5}{10} + 1000\times\frac{2}{10} = 480$ 元。

自我練習 11

彩券發行 500000 張，頭獎 1 張得 100 萬，貳獎 5 張各得 50 萬元，參獎 15 張各得 10 萬元，肆獎 50 張各得 2 萬元，試求購買 1 張彩券中獎的期望值爲多少？

4-2 自我挑戰

1. 同時擲一公正硬幣及一公正骰子，試寫出樣本空間 S。
2. 擲一公正骰子二次，試寫出點數和為 5 的事件 A。
3. 同時擲二個公正骰子，A 表示點數和小於 9 的事件，試寫出 A 的餘事件。
4. 擲一公正骰子二次，A 表點數和大於 9 的事件，B 表示第一次為 5 的事件，求：(1) A 與 B 的和事件 (2) A 與 B 的積事件。
5. 甲、乙、丙三人排成一列，A 表示甲必須排在乙的前面的事件，B 為乙不排在首位的事件，問兩事件是否互斥？
6. 箱內有白球 14 個、紅球 15 個、綠球 21 個，隨機任取一球，則不是紅球的機率為______。
7. 投擲一公正骰子，則點數不大於 4 的機率為______。
8. 由自然數 1～70 個數字中任取一數，則是 2 或 3 的倍數的機率為______。
9. 三年甲班數學與英文及格人數分別占全班的 $\frac{5}{6}$ 及 $\frac{3}{4}$，兩科都及格占全班的 $\frac{3}{5}$，由其班上任選一人，則此同學兩科都不及格的機率為______。
10. 袋中有 10 元硬幣 2 個，5 元硬幣 4 個，任取一個的期望值為______。
11. 每製造 1000 台計算機中，約有 23 台有瑕疵。阿寶買了一台計算機，則阿寶買到瑕疵品的機率為多少______？
12. 若大樂透(01～49 號)已開出 7、15、23、40、42 等 5 個號碼，且每個號碼被開出的機會相等，則最後一個開出的號碼比 40 大的機率為______。
13. 根據調查，每 100 個買立可帶的人，約有 37 個用 A 品牌，52 個用 B 品牌，11 個用 C 品牌。本月有 2500 人買立可帶，問買 A 品牌的人約多少個？(每人限買一罐)

14.擲兩枚公正硬幣的遊戲規則如附表，今某人參加此遊戲獲利的期望值為多少元？

出現結果	兩正面	一正一反	兩反面
得或付	得 20 元	得 10 元	付 20 元

本章重點整理

1. 集合的表示法

⑴列舉法：在{　}內，將集合的元素逐一列出。

⑵構式法：在{　}內，以小寫英文字母代表元素，然後以數學符號或文字描述其性質。

2. 集合的關係

⑴若 a 是一個集合 A 的元素，記做 $a\in A$(讀做 a 屬於 A)；而 b 不是集合 A 的元素，記做 $b\notin A$ (讀做 b 不屬於 A)。

⑵集合 A、B，若 A 的每一個元素都屬於 B，記做 $A\subset B$(讀做 A 包含於 B)或記做 $B\supset A$(讀做 B 包含 A)。若 A 至少有一個元素不屬於 B，記做 $A\not\subset B$(讀做 A 不包含於 B)。

⑶空集合

若一個集合中無任何元素存在，則稱此集合爲空集合，以{　}或$\varnothing$表示。

⑷宇集或基集

所討論的事物的全體所成的集合稱爲宇集；記做U。

例如；擲一個骰子的點數所成的集合U＝$\{1,2,3,4,5,6\}$。

⑸子集合(部分集合)

集合 A、B，若 $A\subset B$，則稱 A 爲 B 的子集合(部分集合)；若 $A\subset B$ 且 B 中至少有一元素不屬於 A，則 A 爲 B 的眞子集合。

$\varnothing$爲任意集合的子集合，集合本身爲自己的子集合。若集合 A 的元素有 k 個(記做 $n(A)=k$)，則集合 A 有 2^k 個子集合。

㈥補集合(餘集)

集合 A 爲宇集 U 的子集合，屬於 U 但不屬於

A 的元素所成之集合，記做A'，讀做 A 的補集。

即 $A'=\{x|x\in U$ 但 $x\notin A\}$

(7)集合的相等

集合 A、B，若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，則 A 與 B 相等，記做 $A=B$(讀做 A 等於 B)。

3.集合的運算

聯集：$A\cup B=\{x|x\in A$ 或 $x\in B\}$。

交集：$A\cap B=\{x|x\in A$ 且 $x\in B\}$。

差集：$A-B=\{x|x\in A$ 但 $x\notin B\}$。

4.樣本空間與事件

(1)樣本空間：在隨機試驗中，其所有可能結果所成的集合稱爲“樣本空間”，常以Ｓ或**Ω**表示。每一種結果稱爲樣本爲樣本空間的元素。

(2) 事件：在隨機試驗中，符合某設定條件的結果所成的集合稱爲“事件”，也就是說：事件爲樣本空間的子集合。

(3) 事件的種類

簡單事件：在隨機試驗中，僅含有一個結果的事件。

複合事件：在隨機試驗中，含有兩個或兩個以上結果的事件。

全事件：等同於樣本空間，又稱爲必然事件。

空事件：不可能發生的事件，此事件爲空集合。

餘事件：事件A以外的結果所成的集合稱爲 A 的餘事件，以 A' 表示。

和事件：事件的聯集。即 $A\cup B$ 爲事件 A、B 的和事件，即 A 或 B 至有一發生的事件。

積事件：事件的交集。即 $A\cap B$ 爲事件 A、B 的積事件，即 A 和 B 同時發生的事件。

互斥事件：兩事件的交集爲空集合稱之。事件 A 和 B，若$A\cap B=\varnothing$；稱A，B爲互斥事件。

5.簡易機率計算

⑴ 樣本空間的樣本數為 $n(S)$，事件 A 的樣本數為 $n(A)$，則此事件發生的機率為 $\dfrac{n(A)}{n(S)}$，記做 $P(A)$，即 $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$ 。

⑵ 機率的基本性質如下：

① $P(S)=1$，全事件發生的機率為 1。

② $P(\varnothing)=0$，空事件發生的機率為 0。

③ $0\leq P(A)\leq 1$，A 為一般事件。

④ $P(A')=1-P(A)$，A為一般事件而為其餘事件。

⑤ $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$，$A$、$B$為一般事件。

⑥ $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$，A、B為一般事件。

⑶ 期望值(數學期望值)，其定義如下：

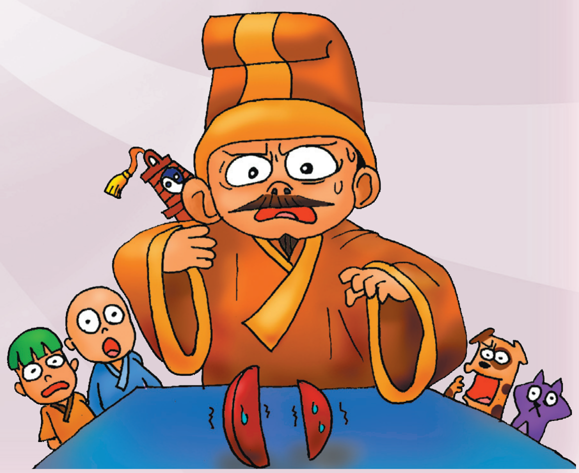
某個試驗的樣本空間 S，可分割成 k 個事件，且任兩個事件的交集均為空集合，各事件發生的機率分別為 $P_1,P_2\cdots\cdots P_k$，

且 $P_1+P_2+\cdots\cdots+P_k=1$ ，若其對應的數值為 $m_1,m_2\cdots\cdots m_k$，

則此試驗的期望值為

$E=P_1\cdot m_1+P_2\cdot m_2+\cdots\cdots+P_k\cdot m_k$

1



notes

心得筆記欄