114 學年度四技二專第五次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

數學(C)卷 114-5-C

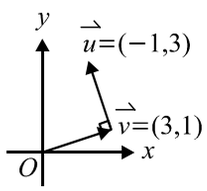
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
B	A	C	D	D	B	C	A	D	A	B	B	A	C	B	D	D	C	D	C	B	A	A	D	C

1. 設所求爲 $\vec{u}=(a,b)$ ，則 $\vec{u}\cdot\vec{v}=0\Rightarrow 3a+b=0$

   $\Rightarrow 3a=-b\Rightarrow \frac{a}{b}=-\frac{1}{3}$ ，又速率相同，即 $|\vec{u}|=|\vec{v}|$

   故可令 $\vec{u}=(-1,3)$ 或 $(1,-3)$

   但由「左轉」可知 $\vec{u}=(-1,3)$ 符合題意，故選(B)



2. 所求爲首項 1000，公差 200，項數 12 的等差級數和

   $=\frac{12\times[2\times1000+(12-1)\times200]}{2}=25200$ 元，故選(A)

3. 主菜→小菜→湯品或飲料

   $=C_1^3\times C_2^5\times 8$ (7 選 1 或不選)

   $=3\times10\times8$

   $=240$ (種)

   故選(C)

4. 設所求爲 N 隻，則 $N\times2^{8-4}=6400$

   $\Rightarrow N=\frac{6400}{2^4}=400$ 隻，故選(D)

   [另解]

   $6400\rightarrow 3200\rightarrow 1600\rightarrow 800\rightarrow 400$

   8 時　7 時　6 時　5 時　4 時

   故選(D)

5. $\because \vec{u}\cdot\vec{v}=2+2-2=2$ ，又 $|\vec{v}|=\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}=\sqrt{6}$

   $\therefore \vec{u}$ 在 $\vec{v}$ 上的正射影長爲 $\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{v}|}=\frac{2}{\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$

   故選(D)

6. 原式 $=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2}{(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})}$

   $=\frac{5-2\sqrt{15}+3+5+2\sqrt{15}+3}{5-3}$

   $=8$

   故選(B)

7. $\because x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

   $\therefore x-2\,|\,f(x)\Rightarrow f(2)=8+4a+2b-6=0$

   $\Rightarrow 2a+b=-1\cdots①$

   且 $x-3\,|\,f(x)\Rightarrow f(3)=27+9a+3b-6=0$

   $\Rightarrow 3a+b=-7\cdots②$

   解①② $\Rightarrow a=-6$ 、 $b=11$ ，即 $a+b=5$ ，故選(C)

   [另解]

   利用長除法：

$$
\begin{array}{r|l}
 & x\quad -1 \\
\hline
x^2-5x+6 & x^3+ax^2+bx-6 \\
 & x^3-5x^2+6x \\
\hline
 & (a+5)x^2+(b-6)x-6 \\
 & -x^2+5x-6 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

   所以 $a+5=-1\Rightarrow a=-6$ ， $b-6=5\Rightarrow b=11$

   即 $a+b=5$ ，故選(C)

8. 由 $(\sin\theta+\cos\theta)^2=(\frac{7}{5})^2\Rightarrow 1+2\sin\theta\cos\theta=\frac{49}{25}$

   $\Rightarrow \sin\theta\cos\theta=\frac{12}{25}$

   則 $\tan\theta+\cot\theta=\frac{\sin^2\theta+\cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1}{\frac{12}{25}}=\frac{25}{12}$

   故選(A)

9. $\because \theta$ 爲第二象限角且 $\sin\theta=\frac{4}{5}$　$\therefore \cos\theta=-\frac{3}{5}$

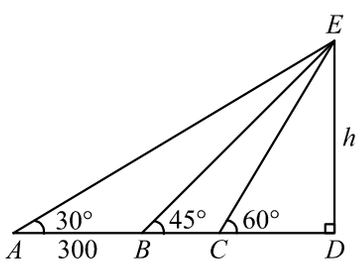
   又 $\sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{4}{5}\times(-\frac{3}{5})=-\frac{24}{25}$

   $\cos2\theta=1-2\sin^2\theta=1-2\times(\frac{4}{5})^2=-\frac{7}{25}$

   所求 $=-\frac{24}{25}-\frac{7}{25}=-\frac{31}{25}$

   故選(D)

10.



   如上圖所示，設山高 $\overline{DE}=h$ 公尺

   則 $\overline{AD}=\sqrt{3}h$ 、 $\overline{BD}=h$ 、 $\overline{CD}=\frac{h}{\sqrt{3}}$

   $\because \overline{AD}-\overline{BD}=300$　$\therefore \sqrt{3}h-h=300$

   $\Rightarrow h=\frac{300}{\sqrt{3}-1}=150(\sqrt{3}+1)$

   所求 $\overline{BC}=\overline{BD}-\overline{CD}=h-\frac{h}{\sqrt{3}}=h(1-\frac{1}{\sqrt{3}})$

$=150(\sqrt{3}+1)(1-\frac{1}{\sqrt{3}})=\frac{1}{\sqrt{3}}\times150(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)=\frac{300}{\sqrt{3}}$

$=100\sqrt{3}$ (公尺)

故選(A)

11. ∵ $V_A=3(\cos0°+i\sin0°)=3(1+0i)=3$

又 $V_B=4(\cos270°+i\sin270°)=4(0-i)=-4i$

∴總電壓 $V_A+V_B=3-4i$

所求 $=|V_A+V_B|=|3-4i|=\sqrt{3^2+(-4)^2}=5$ 伏特

故選(B)

12. 設首項爲 a_1，公比爲 r，則

$a_2+a_3=a_1r+a_1r^2=a_1r(1+r)=6\cdots①$

$a_6+a_7=a_1r^5+a_1r^6=a_1r^5(1+r)=96\cdots②$

$a_4+a_5=a_1r^3+a_1r^4=a_1r^3(1+r)$

由①×②$\Rightarrow a_1r(1+r)\times a_1r^5(1+r)=6\times96$

$\Rightarrow a_1^2r^6(1+r)^2=576$

$\Rightarrow[a_1r^3(1+r)]^2=24^2$

$\Rightarrow a_1r^3(1+r)=\pm24$ (∵各項皆正　∴負不合)

故選(B)

[另解]

設首項爲 a_1，公比爲 r，則

$a_2+a_3=a_1r+a_1r^2=a_1r(1+r)=6\cdots①$

$a_6+a_7=a_1r^5+a_1r^6=a_1r^5(1+r)=96\cdots②$

由$\frac{①}{②}\Rightarrow\frac{a_1r(1+r)}{a_1r^5(1+r)}=\frac{6}{96}\Rightarrow\frac{1}{r^4}=\frac{1}{16}$

$\Rightarrow r=\pm2$ (∵各項皆正　∴負不合)

又 $a_4+a_5=a_1r^3+a_1r^4=a_1r^3(1+r)$

$=r^2\times a_1r(1+r)=4\times6=24$

故選(B)

13. 先排 c 、 c 、 u 、 e 有 $\frac{4!}{2!}=12$ 種

5 個空隙選 3 個放 s 有 $C_3^5=10$ 種

共有 $12\times10=120$ 種

故選(A)

14. ∵圓心 $A(1,-1)$，半徑 $r=\sqrt{5}$，L ： $2x-y+k=0$ 且與圓 C 相切

∴ $d(A,L)=r\Rightarrow\frac{|2+1+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\sqrt{5}$

$\Rightarrow|k+3|=5\Rightarrow k+3=\pm5\Rightarrow k=2$ 或 -8

即 L ： $2x-y+2=0$ 或 $2x-y-8=0$

以圓心 $A(1,-1)$ 代入兩式得

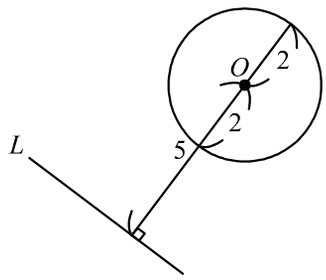
$2-(-1)+2=5>0$ 與 $2-(-1)-8=-5<0$

可知圓心在 L ： $2x-y+2=0$ 之右半平面，即 $k=2$

故選(C)

15. ∵圓心 $O(0,0)$，半徑 2， $d(O,L)=\frac{|-25|}{5}=5$

如下圖所示



∴圓上的點到直線的距離範圍爲區間

$[5-2,5+2]=[3,7]$

即整數距離 3、4、5、6、7，其中 3 和 7 各 1 個點，4、5、6 各 2 個點，共有 $1+2+2+2+1=8$ 個點

故選(B)

16. ∵由算幾不等式知 $\frac{x+y}{2}\geq\sqrt{xy}$

$\Rightarrow x+y\geq2\sqrt{xy}=2\times\sqrt{16}=8$

檢驗等號成立條件 $x=y$，此時 $x+y=8$

可得 $x=y=4$，合乎 $xy=16$ 之標準

即 $x+y$ 之最小值爲 8 公分，故選(D)

17. 利用其增廣矩陣作列運算可得

$$(-2)\to\begin{bmatrix}1&1&1&4\\2&3&2&9\\3&4&k&13\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&1&1&4\\0&1&0&1\\0&1&k-3&1\end{bmatrix}$$

$$(-1)\to\begin{bmatrix}1&1&1&4\\0&1&0&1\\0&0&k-3&0\end{bmatrix}$$

∵有無限多組解

∴第三列 $k-3=0\Rightarrow k=3$

故選(D)

[另解]

方程組 $\begin{cases}x+y+z=4\\2x+3y+2z=9\\3x+4y+kz=13\end{cases}$ 有無限多組解

則 $\begin{vmatrix}1&1&1\\2&3&2\\3&4&k\end{vmatrix}=0\Rightarrow3k+8+6-9-8-2k=0$

$\Rightarrow k=3$

故選(D)

18. ∵ $\overrightarrow{AB}=(1,2,-2)$，$\overrightarrow{AC}=(2,3,k-3)$

∴ $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(\begin{vmatrix}2&-2\\3&k-3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-2&1\\k-3&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix})$

$=(2k,-k-1,-1)$

$\Delta=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{(2k)^2+(-k-1)^2+(-1)^2}=3\sqrt{2}$

平方 $\Rightarrow\frac{1}{4}(5k^2+2k+2)=18$

$\Rightarrow5k^2+2k-70=0$

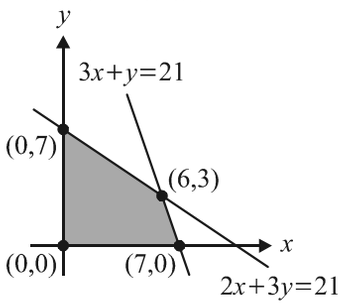
判別式 $2^2-4\times5\times(-70)=1404>0$，即 k 有兩相異實根，故選(C)

19. 設生產桌子 x 個、椅子 y 個，列出限制條件如下

$$\begin{cases} x \ge 0\,,\, y \ge 0 \\ 2x+3y \le 21 \\ 3x+y \le 21 \end{cases}$$

目標函數爲利潤 $f(x\,,\,y)=500x+300y$ 元

作可行解區域如下



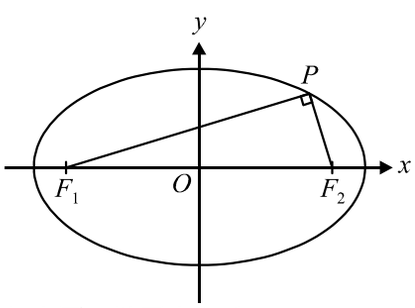
將各頂點代入 $f(x\,,\,y)$ 得

$f(0\,,\,0)=0$ 、 $f(0\,,\,7)=2100$

$f(6\,,\,3)=3900$ 、 $f(7\,,\,0)=3500$

可知當生產桌子 6 個、椅子 3 個時，有最大利潤爲 3900 元，故選(D)

20.



如上圖，橢圓中心爲 $O(0\,,\,0)$

$\because a=5$ 、 $b=3$　$\therefore c=4$

且 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a=10$ ， $\overline{F_1F_2}=2c=8$

又 $\angle F_1PF_2=90°\Rightarrow \overline{PF_1}^2+\overline{PF_2}^2=\overline{F_1F_2}^2=64$

由 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=10$ ，兩邊平方，得到

$\overline{PF_1}^2+2\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}+\overline{PF_2}^2=100$

$\Rightarrow 2\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=100-64=36$

$\Rightarrow \overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=18$

即 ΔPF_1F_2 面積 $=\dfrac{1}{2}\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=9$

故選(C)

21. $\because 9x^2-16y^2=144\Rightarrow \dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1\Rightarrow a=4$ 、 $b=3$

$\therefore |\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2a=8$

$\Rightarrow |10-\overline{PF_2}|=8\Rightarrow 10-\overline{PF_2}=-8\,(\because \overline{PF_1}<\overline{PF_2})$

$\Rightarrow \overline{PF_2}=18$ ，故選(B)

22. $\because \dfrac{dy}{dx}=3x^2-6x=3(x-1)^2-3$

$\therefore$當 $x=1$ 時，切線斜率有最小值 -3

此時切點爲 $(1\,,\,1^3-3+4)=(1\,,\,2)$

由點斜式可知

切線方程式爲 $y-2=-3(x-1)\Rightarrow y=-3x+5$

故選(A)

23. (A) 反例：令 $f(x)=x^3\Rightarrow f\,'(x)=3x^2\Rightarrow f\,'(0)=0$

但 $f(x)$ 在 $x=0$ 爲反曲點 $(0\,,\,0)$ ，沒有極值

(B) $\because f\,'(x)>0$ ，在區間 $(a\,,\,b)$ 上

$\therefore$存在 $a<c<b$ ，使得 $f\,'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}>0$

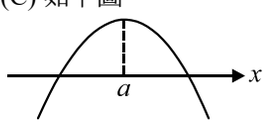
又 $\because a<b$

$\therefore b-a>0\Rightarrow f(b)-f(a)>0$

$\Rightarrow f(b)>f(a)$

$\therefore f(x)$ 在 $(a\,,\,b)$ 上爲遞增

(C) 如下圖

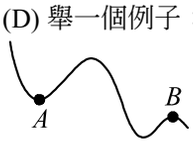


當 $x<a$ 時， $f\,'(x)>0$ ，此時， $f(x)$ 爲遞增

當 $x>a$ 時， $f\,'(x)<0$ ，此時， $f(x)$ 爲遞減

$\therefore f(a)$ 爲極大值

(D) 舉一個例子：



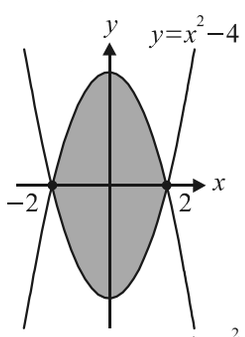
A 點爲極小值

B 點爲極大值

但是，極小值＞極大值

故選(A)

24.



解 $x^2-4=4-x^2\Rightarrow 2x^2=8\Rightarrow x=\pm 2$

$\Rightarrow$ 交點爲 $(2\,,\,0)$ 與 $(-2\,,\,0)$

所求 $=\int_{-2}^{2}[(4-x^2)-(x^2-4)]dx$

$=\int_{-2}^{2}(8-2x^2)dx=(8x-\dfrac{2}{3}x^3)\Big|_{-2}^{2}$

$=\dfrac{32}{3}-(-\dfrac{32}{3})=\dfrac{64}{3}$

故選(D)

25. 所求 $=\int_0^3(-x^2+10x+9)dx=(-\dfrac{x^3}{3}+5x^2+9x)\Big|_0^3$

$=63-0=63$ (公尺)，故選(C)