114 學年度四技二專第三次聯合模擬考試
共同科目　數學(C)卷　詳解

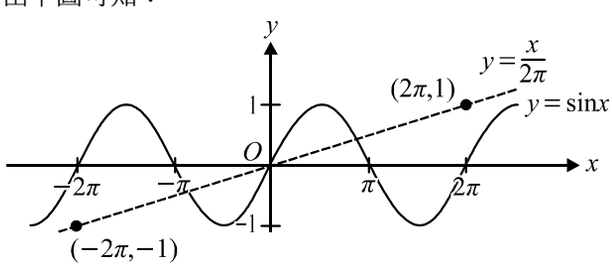
數學(C)卷 114-3-C

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
C	D	B	A	B	D	A	C	B	D	C	B	A	C	D	B	A	B	D	C	A	B	A	C	D

1. (A) ∵ $\overline{AC}$ 與 $\overline{BG}$ 爲歪斜線　∴不共平面
   (B) ∵ $\overline{DF}$ 與 $\overline{BG}$ 爲歪斜線　∴不共平面
   (C) ∵ $\overline{AH}$ 與 $\overline{BG}$ 爲平行線　∴共平面
   (D) ∵ $\overline{EF}$ 與 $\overline{BG}$ 爲歪斜線　∴不共平面
   由上可知，故選(C)
2. ∵此對數函數遞減　∴ $0<b<1$
   又 $x=1$ 代入時， $y=a+0=a$
   由圖可知， $a<0$
   故選(D)
3. 設選中的數字爲「O」，沒選到的數字「X」
   即 OOOXXXXXXX
   ∵3 個數字均不是連續整數
   ∴3 個 O 不能相鄰，只能放在 X 的空隙中
   則由 8 個空隙中任選 3 個，有 $C_3^8=\frac{8!}{3!5!}=56$ 種取法，
   故選(B)
4. 令此 4 天之日期爲 x 、 $x+1$ 、 $x+7$ 、 $x+8$
   ∴ $x+x+1+x+7+x+8=56$
   $\Rightarrow 4x=40$
   $\Rightarrow x=10$
   由此可知：7/10 是星期四，進而得知 7/1 是星期二，
   故選(A)

日	一	二	三	四	五	六
				x	$x+1$	
				$x+7$	$x+8$	

5. 圓 C 之方程式爲 $2x^2+2y^2-4x+16y-6=0$
   $\Rightarrow x^2+y^2-2x+8y-3=0$
   ∴過點 $P(4,2)$ 之切線段長
   $=\sqrt{4^2+2^2-2\times4+8\times2-3}=5$
   故選(B)
6. 設最快需 n 分鐘達成目標
   ∴ $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{n-1}>10^7$
   $\Rightarrow \frac{1\times(2^n-1)}{2-1}>10^7$
   $\Rightarrow 2^n-1>10^7$
   ∵ 2^n 的個位數字不爲 1
   ∴與 $2^n>10^7$ 有相同的最小正整數解
   而 $2^n>10^7$
   $\Rightarrow \log 2^n>\log 10^7$
   $\Rightarrow n\cdot(0.3010)>7$
   $\Rightarrow n>23.25\cdots$ ， n 取 24，故選(D)
7. $\overrightarrow{FD}=\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AD}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
   $=-\frac{1}{2}(2,-6)+\frac{1}{3}(-6,-3)=(-1,3)+(-2,-1)$
   $=(-3,2)$
   ∴ $\alpha=-3$ 且 $\beta=2\Rightarrow\alpha+\beta=(-3)+2=-1$
   故選(A)
8. 令 $Z=1\cdot(\cos\theta+i\sin\theta)$ ，其中 θ 爲 Z 之主幅角
   而 $1+i=\sqrt{2}(\cos45°+i\sin45°)$
   ∴ $(1+i)\cdot Z=\sqrt{2}[\cos(\theta+45°)+i\sin(\theta+45°)]$
   即由 Z 的主幅角 θ 逆時針方向再旋轉 45°，且與原點的距離變爲 $\sqrt{2}$
   由圖可知： C 點最有可能，故選(C)
9. 由下圖可知：



   $y=\sin x$ 與 $y=\frac{x}{2\pi}$ 的圖形相交於 3 點，故選(B)
10. ∵ $f(x)$ 爲二次函數，且 $f(x)>0$ 之解爲 $-6<x<3$
    ∴令 $f(x)=-k(x+6)(x-3)$ ，其中 $k>0$
    而 $f(3x)\le0$
    $\Rightarrow -k(3x+6)(3x-3)\le0$
    $\Rightarrow (x+2)(x-1)\ge0$
    $\Rightarrow x\ge1$ 或 $x\le-2$ ，與題目比較，可得 $\alpha=1$ 且 $\beta=-2$
    ∴ $\alpha-\beta=1-(-2)=3$
    故選(D)
    [另解]
    ∵ $f(x)>0$ 之解爲 $-6<x<3$
    ∴ $f(3x)\le0$ 之解爲 $3x\le-6$ 或 $3x\ge3$
    $\Rightarrow x\le-2$ 或 $x\ge1$ ，可得 $\alpha=1$ 且 $\beta=-2$
    ∴ $\alpha-\beta=1-(-2)=3$
    故選(D)
11. 假設 P 點爲原點 $(0,0)$
    令此拋物線 $y=kx^2$

∵水深 16 公尺時，$\overline{AB}=64$

∴將 $B(32,16)$ 代入 $y=kx^2 \Rightarrow 16=k\times 32^2$

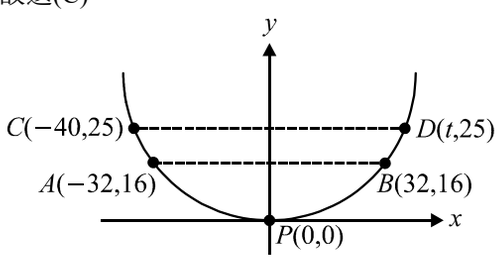
∴ $k=\frac{1}{64}$ ，拋物線方程式爲 $y=\frac{1}{64}x^2$

再令 $D(t,25)$ ， $t>0$ ，代入 $y=\frac{1}{64}x^2$

∴ $25=\frac{1}{64}t^2 \Rightarrow t=40$

$\Rightarrow \overline{CD}=2t=2\times 40=80$

故選(C)

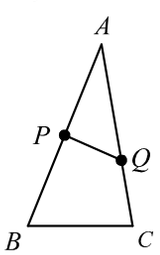


12. ΔABC 的面積 $=\frac{1}{2}\times 15\times 8\times \sin A$

ΔAPQ 的面積 $=\frac{1}{2}xy\sin A$

由題意可知： $\frac{1}{2}xy\sin A=(\frac{1}{2}\times 15\times 8\times \sin A)\times\frac{1}{2}$

∴ $xy=60$ ，故選(B)



13. 令 $f(x)=(x^2-2x-3)q_1(x)+3x+1$

$=(x-3)(x+1)\cdot q_1(x)+3x+1$

∴ $f(3)=10$ 且 $f(-1)=-2\cdots①$

而 $xf(x)=(x^2+x)q_2(x)+ax+b=x(x+1)q_2(x)+ax+b$

∴ $0\cdot f(0)=b$ 且 $(-1)\cdot f(-1)=-a+b$

$\Rightarrow \begin{cases} b=0 \\ f(-1)=a-b \end{cases} \cdots②$

由①、②可知： $\begin{cases} a-b=-2 \\ b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-2 \\ b=0 \end{cases}$

∴ $3a+2b=-6$ ，故選(A)

14. 由題目知：圓心(2 , 1)，半徑爲 3

(A) 圓心到 x 軸之距離爲 1

(B) 圓心到 y 軸之距離爲 2

(C) 圓心到 $4x-3y=1$ 之距離爲 $\frac{|4\times 2-3\times 1-1|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}=\frac{4}{5}$

(D) 圓心到 $5x+12y=7$ 之距離爲

$\frac{|5\times 2+12\times 1-7|}{\sqrt{5^2+12^2}}=\frac{15}{13}$

因圓心與直線之距離越短，則直線所截之弦長越長

而 $\frac{4}{5}$ 爲最短距離，故選(C)

15. 有選到甲： $3\times P_3^7=3\times 7\times 6\times 5=630$

沒有選到甲： $P_4^7=7\times 6\times 5\times 4=840$

∴ $630+840=1470$ ，故選(D)

[另解]

遊樂設施	A	B	C	D
選擇	C_1^7	C_1^7	C_1^6	C_1^5

全部體驗活動方法共 $C_1^7\times C_1^7\times C_1^6\times C_1^5=1470$

故選(D)

16. 令 $\angle ACB=\alpha$ 且 $\angle ECD=\beta$

由 ΔABC 中，可得 $\tan\alpha=\frac{1}{2}$

再由 ΔCDE 中，可得 $\tan\beta=\frac{1}{3}$

∴ $\tan(\angle ACE)=\tan[180°-(\alpha+\beta)]=-\tan(\alpha+\beta)$

$=-\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}=-\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}}=-1$

得 $\angle ACE=135°$ ，故選(B)

17. 先將三個式子化爲極式

$\cos 127°+i\sin 307°=-\cos 53°-i\sin 53°$

$=\cos 233°+i\sin 233°$

$\sin 53°-i\cos 233°=\cos 37°+i\cos 53°$

$=\cos 37°+i\sin 37°$

$\cos 510°-i\sin 210°=-\cos 30°+i\sin 30°$

$=\cos 150°+i\sin 150°$

∴原式 $=\frac{(\cos 233°+i\sin 233°)(\cos 37°+i\sin 37°)}{\cos 150°+i\sin 150°}$

$=\cos(233°+37°-150°)+i\sin(233°+37°-150°)$

$=\cos 120°+i\sin 120°=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ，故選(A)

18. ∵ $60\div 2=30$　∴1 小時後，甲有 2^{30} 隻

∵ $60\div 3=20$　∴1 小時後，乙有 3^{20} 隻

∵ $60\div 5=12$　∴1 小時後，丙有 5^{12} 隻

∵ $60\div 6=10$　∴1 小時後，丁有 6^{10} 隻

①先比較 2^{30} 、 3^{20} 、 6^{10}

∵ $2^{30}=(2^3)^{10}=8^{10}$ ， $3^{20}=(3^2)^{10}=9^{10}$

∴ $3^{20}>2^{30}>6^{10}$

②再比較 3^{20} 、 5^{12}

∵ $3^{20}=(3^5)^4=243^4$ ， $5^{12}=(5^3)^4=125^4$　∴ $3^{20}>5^{12}$

由①②知：乙細菌增殖的數量最多，故選(B)

19. 分別取 E_1 、 E_2 的法向量 $\overrightarrow{N_1}=(1,1,1)$ 、 $\overrightarrow{N_2}=(3,2,1)$

∵ $\overrightarrow{N_1}\times\overrightarrow{N_2}=(\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\1&3\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&1\\3&2\end{vmatrix})=(-1,2,-1)$

$=-(1,-2,1)$

∴取所求平面法向量 $\overrightarrow{N}=(1,-2,1)$

令平面之方程式 $x-2y+z=k$

將 $(1,-2,3)$ 代入：$1+4+3=k \Rightarrow k=8$

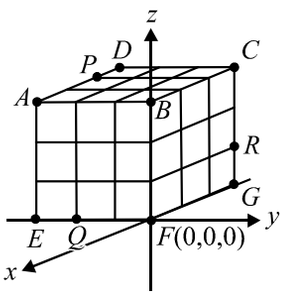
故 $x-2y+z=8$ 與 $x+ay+bz=c$ 同義

可知 $a=-2$ ， $b=1$ 且 $c=8$

$\therefore a+b+c=-2+1+8=7$

故選(D)

20.



令 F 爲原點 $(0,0,0)$，而 $G(-6,0,0)$、$E(0,-6,0)$、$B(0,0,6)$

得 $P(-4,-6,6)$ 、 $Q(0,-4,0)$ 、 $R(-6,0,2)$

則 $\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=(4,2,-6)\cdot(-2,6,-4)$

$=4\times(-2)+2\times6+(-6)\times(-4)=28$

故選(C)

21. 由餘弦定理知：

$\overline{PQ}^2=50^2+50^2-2\times50\times50\times\cos45°$

$=2500+2500-5000\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$=5000-2500\sqrt{2}$

$\therefore \overline{PQ}=50\sqrt{2-\sqrt{2}}$ ，故選(A)

22. 由柯西不等式

$(x^2+y^2)(2^2+(-3)^2)\geq(2x-3y)^2$

$\therefore(2x-3y)^2\leq26\times13$

$\Rightarrow -13\sqrt{2}\leq2x-3y\leq13\sqrt{2}$

$\therefore\vec{p}\cdot\vec{q}=2x-3y$ 之最大值爲 $13\sqrt{2}$

故選(B)

[另解]

$\vec{p}\cdot\vec{q}=|\vec{p}|\cdot|\vec{q}|\cdot\cos\theta$

$=\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{2^2+(-3)^2}\cdot\cos\theta\leq\sqrt{26}\cdot\sqrt{13}\cdot1=13\sqrt{2}$

$\therefore\vec{p}\cdot\vec{q}$ 之最大值爲 $13\sqrt{2}$

故選(B)

23. 由虛根成雙定理知此方程式也有 $1-i$ 之根

$\because 1+i+1-i=2$ 且 $(1+i)(1-i)=2$

$\therefore$有此兩根之二次方程式爲 $x^2-2x+2=0$

利用長除法

$$\begin{array}{r|l} & 1+2 \\ \hline 1-2+2 & 1+0+\quad a\quad +b \\ & \underline{1-2+\quad 2} \\ & \quad 2+(a-2)+b \\ & \quad \underline{2-\quad 4\quad +4} \\ & \qquad (a+2)+(b-4) \end{array}$$

可知：$\begin{cases}a+2=0\\b-4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-2\\b=4\end{cases}\Rightarrow ab=(-2)\times4=-8$

故選(A)

[另解]

有一根爲 $1+i$ 代回原方程式可得

$(1+i)^3+a(1+i)+b=0\Rightarrow(2i-2)+(a+ai)+b=0$

$\Rightarrow(a+b-2)+(a+2)i=0\Rightarrow\begin{cases}a+b-2=0\\a+2=0\end{cases}$

$\Rightarrow a=-2$ 、 $b=4$

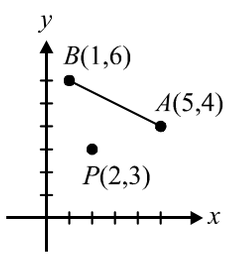
$\Rightarrow ab=(-2)\times4=-8$

故選(A)

24. 直線 L：$y-3=m(x-2)$ 必通過 $P(2,3)$

$\because m_{AP}=\dfrac{4-3}{5-2}=\dfrac{1}{3}$ 且 $m_{BP}=\dfrac{3-6}{2-1}=-3$

$\therefore$當 $-3<m<\dfrac{1}{3}$ 時，直線 L 與 $\overline{AB}$ 不相交，故選(C)



25. 設每年年初固定存入 x 元

則 $x(1+2\%)^5+x(1+2\%)^4+\cdots+x(1+2\%)=100000$

$\Rightarrow x\cdot\dfrac{1.02(1.02^5-1)}{1.02-1}=100000$

$\Rightarrow x\cdot\dfrac{1.02^6-1.02}{0.02}=100000$

$\Rightarrow x(1.1262-1.02)\approx2000$

$\Rightarrow x\approx18832$ ，故選(D)